9. 푸리에 변환의 정의

푸리에 급수는 주기가 T인 임의의 주기함수 f(t)를
기본주기가 T인 고조파들의 선형합으로 표현하고자 하는 것

푸리에 변환은 비주기함수에 대해서도 적용되도록 확장한 것이다.

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \\ \mathbf{F}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_o t} \\ c_n = \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_o t} dt \end{cases}$$

$T \to \infty$로 하면 각 변수들은 다음과 같이 연속적인 변수로 변한다.

$$\omega_o \to d\omega, \quad n\omega_o \to \omega, \quad \frac{1}{T} = \frac{\omega_o}{2\pi} \to \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\boxed{\lim_{T \to \infty} c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \equiv \mathbf{F}(\omega)}$$

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_o t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_o t}\omega_o$$

$$f(t) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_o t}\omega_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \\ \mathbf{F}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \end{cases}$$

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathscr{F}[f(t)], \quad f(t) = \mathscr{F}^{-1}[\mathbf{F}(\omega)]$$

$$\left.\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \\ \mathbf{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \end{aligned}\right\}$$

10. 쌍대성

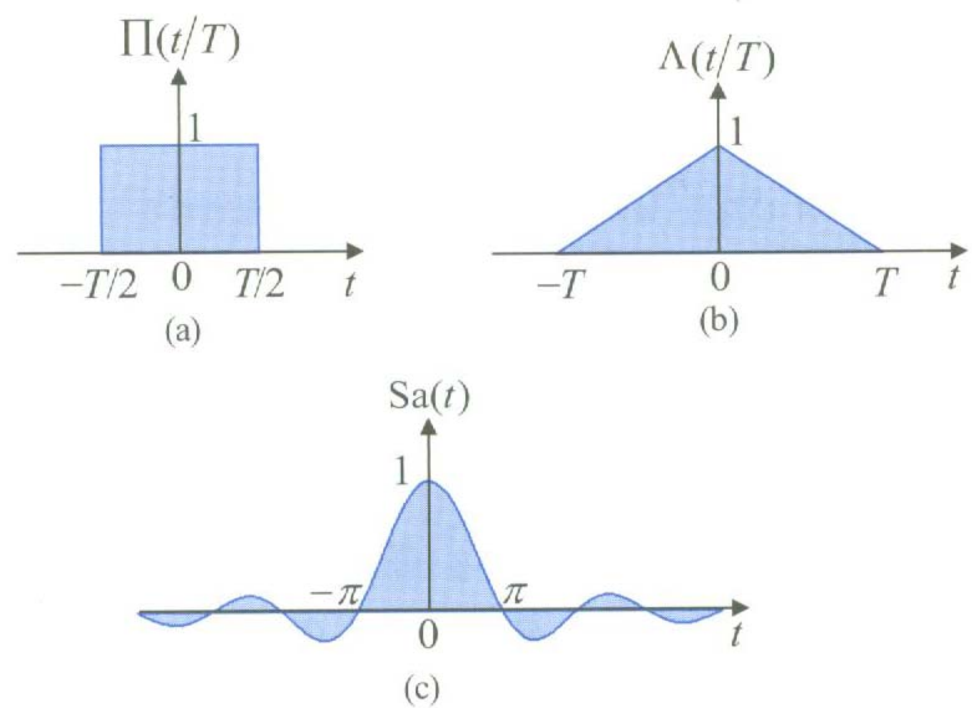
식 (52)를 살펴보면 푸리에 변환과 역변환은 근본적으로 동일한 형태이다. 따라서 푸리에 변환쌍은 다음과 같은 쌍대성이 가장 큰 특징이다.

$$\left.\begin{array}{l} f(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \mathrm{F}(\omega) \\ \mathrm{F}(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi f(-\omega) \end{array}\right\} \tag{56}$$

따라서 하나의 변환쌍을 알면 이와 쌍대가 되는 또 다른 변환쌍을 저절로 얻을 수 있어 편리하다. 식 (56)의 증명은 식 (52)의 첫 번째 식인 역 푸리에 변환식에서 ω를 x로 치환하고 t를 $-\omega$로 치환하여 양변에 2π를 곱하면 다음과 같이 간단히 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} 2\pi f(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x) e^{-ix\omega} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(t) e^{-i\omega t} dx \\ &= \mathscr{F}[\mathrm{F}(t)] \end{aligned} \tag{57}$$

11. 몇몇 함수의 정의



$$\Pi(t/T) = \begin{cases} 1, & (|t| \le T/2) \\ 0, & (|t| > T/2) \end{cases}$$

$$\Lambda(t/T) = \begin{cases} |t| + T, & (|t| \le T) \\ 0, & (|t| > T) \end{cases}$$

$$\mathrm{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$$

12. 충격함수와 상수

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{(a)} & \delta(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 1 \\ \textbf{(b)} & 1 \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi\delta(\omega)\end{array}\right\}$$

$$\mathscr{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{0} dt = 1$$

$$\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

로 증명되며 그림 5-6(d)가 이를 보여준다. 그림 5-6(a)에서 충격함수에는 0에서 무한대까지의 모든 주파수 성분이 균일한 크기로 포함되어 있음을 알 수 있으며 이 점이 충격함수의 가장 큰 매력 중 하나이다. 따라서 시스템의 입력에 충격함수를 인가한다는 것은 주파수 0에서 무한대까지의 모든 사인함수를 동일한 진폭으로 한꺼번에 입력시키는 것과 같으므로 충격응답이 소중하게 취급되는 것이다. 충격응답은 우리가 일상 생활에서 무의식적으로 이용하고 있으며 그 예가 수박이 잘 익었는지 두들겨 보는 것 등이다.

13. 구형함수와 표본화 함수

$$\left.\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \prod(t/T) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} T\mathrm{Sa}(\omega T/2) \\ &\text{(b)} \quad \frac{W}{\pi}\mathrm{Sa}(Wt) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \prod\left(\frac{\omega}{2W}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\mathscr{F}[\prod(t/T)] = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t}\,dt = \left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}$$

$$= T\mathrm{Sa}(\omega T/2)$$

14.

복소지수함수 $e^{i\omega_o t}$의 푸리에 변환

$$e^{i\omega_o t} \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi\delta(\omega-\omega_o) \qquad (68)$$

[증명] 증명을 역으로 한다. 즉 위의 식 우변에 역변환을 취하면

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega-\omega_o)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_o)e^{i\omega t}\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_o)e^{i\omega_o t}\,d\omega \\
&= e^{i\omega_o t}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_o)\,d\omega \\
&= e^{i\omega_o t}
\end{aligned} \qquad (69)$$

15.

사인 및 코사인함수의 푸리에 변환

$$\left.\begin{aligned} &\text{(a)}\quad \cos\omega_o t \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \pi[\delta(\omega+\omega_o)+\delta(\omega-\omega_o)] \\ &\text{(b)}\quad \sin\omega_o t \xleftrightarrow{\mathscr{F}} i\pi[\delta(\omega+\omega_o)-\delta(\omega-\omega_o)] \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

[증명] 식 (68)의 변환쌍을 이용한다. 먼저 코사인의 경우는 오일러 공식을 이용하면 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathscr{F}[\cos\omega_o t] &= \frac{1}{2}\mathscr{F}[e^{i\omega_o t}+e^{-i\omega_o t}] \\ &= \frac{1}{2}\mathscr{F}[e^{i\omega_o t}]+\frac{1}{2}\mathscr{F}[e^{-i\omega_o t}] \\ &= \pi\delta(\omega-\omega_o)+\pi\delta(\omega+\omega_o) \end{aligned} \qquad (71)$$

16.

지수함수 e^{at}의 푸리에 변환

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{a+i\omega} \quad (a>0) \tag{72}$$

[증명] 푸리에 변환의 정의에 의해

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}dt = \frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)t}\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega} \tag{73}$$

단 $a<0$이면 적분값이 유한하지 않으므로 푸리에 변환은 정의되지 않는다.

17.

시그넘(signum) 함수 sgn(t)의 푸리에 변환

시그넘 함수 sgn(t)는 다음과 같이 정의된다(그림 5-8(b)).

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & (t<0)\\ 0 & (t=0)\\ -1 & (t>0)\end{cases}$$

[증명] 시그넘 함수는 그림 5-8(a)의 함수에서 $a\to 0$으로 한 것과 같으므로

$$\operatorname{sgn}(t)=\lim_{a\to 0}[e^{-at}u(t)-e^{at}u(-t)] \tag{76}$$

따라서 위의 식으로부터 sgn(t)의 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\operatorname{sgn}(t)] &= \lim_{a\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-i\omega t}dt-\int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(-t)e^{-i\omega t}dt\right]\\ &= \lim_{a\to 0}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}dt-\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}dt\right]\\ &= \lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{a+i\omega}-\frac{1}{a-i\omega}\right]\\ &= \lim_{a\to 0}\frac{-i2\omega}{a^2+\omega^2}\\ &= \frac{2}{i\omega}\end{aligned} \tag{77}$$

18.

계단함수 $u(t)$의 푸리에 변환

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \tag{78}$$

[증명] 계단함수 $u(t)$는 다음과 같이 $\mathrm{sgn}(t)$로 표현할 수 있다.

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + \mathrm{sgn}(t)] \tag{79}$$

따라서

$$\mathscr{F}[u(t)] = \frac{1}{2}\mathscr{F}[1] + \frac{1}{2}\mathscr{F}[\mathrm{sgn}(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \tag{80}$$

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\Pi(t/T)$	$T\mathrm{Sa}(\omega T/2)$
$\frac{W}{\pi}\mathrm{Sa}(Wt)$	$\Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right)$
$e^{i\omega_o t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_o)$
$\cos\omega_o t$ $\sin\omega_o t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_o)+\delta(\omega-\omega_o)]$ $i\pi[\delta(\omega+\omega_o)-\delta(\omega-\omega_o)]$
$e^{-at}u(t) \quad (a>0)$	$\frac{1}{a+i\omega}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$
$u(t)$	$\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$

푸리에 변환은 복소 성질이 있으며 함수 $f(t)$가 실함수(real function)일 경우 푸리에 변환 $\mathbf{F}(\omega)$와 그 공액 $\mathbf{F}^*(\omega)$의 관계는 다음과 같다.

$$\mathbf{F}^*(\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \mathbf{F}(-\omega) \qquad \textbf{(81)}$$

즉 $\mathbf{F}^*(\omega)=\mathbf{F}(-\omega)$이며 이를 **공액대칭(conjugate symmetric)**이라 한다. 따라서 $\mathbf{F}(\omega)$의 크기 $|\mathbf{F}(\omega)|$와 편각 $\angle\mathbf{F}(\omega)$는 다음을 만족하다

$$|\mathbf{F}(-\omega)| = |\mathbf{F}(\omega)|, \quad \angle\mathbf{F}(-\omega) = -\angle\mathbf{F}(\omega)$$

즉 $|\mathbf{F}(\omega)|$은 우함수이며 $\angle\mathbf{F}(\omega)$는 기함수이다.

19. 푸리에 변환의 성질

정리 1 **선형성(linearity)**

$$af(t)+bg(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} a\mathbf{F}(\omega)+b\mathbf{G}(\omega)$$

이는 라플라스 변환의 성질과 같다.

정리 2 이동 정리

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{(a)} & e^{i\omega_o t}f(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \mathbf{F}(\omega-\omega_o) \\ \textbf{(b)} & f(t-T) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} e^{-i\omega T}\mathbf{F}(\omega)\end{array}\right\}$$

변조(modulation)

[증명] (a)의 경우는

$$\mathscr{F}[e^{i\omega_o t}f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}[e^{i\omega_o t}f(t)]e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i(\omega-\omega_o)t}dt$$

$$= \mathbf{F}(\omega-\omega_o)$$

(b)의 경우는 $t-T=\tau$로 치환하면 다음과 같이 증명된다.

$$\mathscr{F}[f(t-T)] = \int_{-\infty}^{\infty}f(t-T)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}e^{-i\omega T}d\tau$$

$$= e^{-i\omega T}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$= e^{-i\omega T}\mathbf{F}(\omega)$$

정리 3 **척도변화(scaling)**

$$\text{(a)} \quad f(at) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\text{(b)} \quad \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \mathbf{F}(a\omega)$$

Homework (Description)

정리 4 미분

(a) $$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathscr{F}} (i\omega)^n \mathbf{F}(\omega)$$

(b) $$(-it)^n f(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{d^n \mathbf{F}(\omega)}{d\omega^n}$$

[증명] 먼저 (a)는 다음과 같이 증명된다.

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega)\frac{d^n}{dt^n}[e^{i\omega t}]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega)\frac{d^n}{dt^n}[e^{i\omega t}]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [(i\omega)^n \mathbf{F}(\omega)]e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$= \mathscr{F}^{-1}[(i\omega)^n \mathbf{F}(\omega)]$$

$$\frac{d^n \mathbf{F}(\omega)}{d\omega^n} = \frac{d^n}{d\omega^n}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{d^n}{d\omega^n}[e^{-i\omega t}]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [(-it)^n f(t)]e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \mathscr{F}[(-it)^n f(t)]$$

정리 5 적분

$$\text{(a)}\quad \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{\mathbf{F}(\omega)}{i\omega}$$

$$\text{(b)}\quad \frac{f(t)}{-it} \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \int_{-\infty}^{\omega} \mathbf{F}(\lambda)d\lambda$$

[증명] 먼저 (a)는 부분적분을 이용해 다음과 같이 증명된다.

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right]e^{-i\omega t}dt$$

$$= \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{-i\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \mathbf{F}(0) = 0$$

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{\mathbf{F}(\omega)}{i\omega}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega} \mathbf{F}(\lambda)d\lambda\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\omega} \mathbf{F}(\lambda)d\lambda\right]e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i\omega t}}{it}\int_{-\infty}^{\omega} \mathbf{F}(\lambda)d\lambda\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$-\frac{1}{it}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\lambda)e^{i\omega t}d\omega$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\omega} \mathbf{F}(\lambda)d\lambda = f(0) = 0$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega} \mathbf{F}(\lambda)d\lambda\right] = -\frac{1}{it}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\lambda)e^{i\omega t}d\omega = \frac{f(t)}{-it}$$

정리 6 컨벌루션

$$\left.\begin{aligned}&\text{(a)}\quad f(t)*g(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \mathbf{F}(\omega)\mathbf{G}(\omega)\\ &\text{(b)}\quad f(t)g(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{2\pi}\mathbf{F}(\omega)*\mathbf{G}(\omega)\end{aligned}\right\}$$

$$\mathbf{F}(\omega)*\mathbf{G}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{G}(\omega-\lambda)d\lambda$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi}\mathbf{F}(\omega)*\mathbf{G}(\omega)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{G}(\omega-\lambda)d\lambda\right]e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(\lambda)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{G}(\omega-\lambda)e^{i\omega t}d\omega\right]d\lambda$$

$$\omega-\lambda=x:$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(\lambda)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{G}(x)e^{i(x+\lambda)t}dx\right]d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(\lambda)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{G}(x)e^{ixt}dx\right]e^{i\lambda t}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(\lambda)g(t)e^{i\lambda t}d\lambda$$

$$=g(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda\right]$$

$$=g(t)f(t)$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi}\mathbf{F}(\omega)*\mathbf{G}(\omega)\right]=f(t)g(t)$$

정리 7 파스발 정리

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}(\omega)|^2 d\omega \qquad \textbf{(104)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |\mathbf{F}(\omega)|^2 d\omega$$

위의 식이 의미하는 바는 시간 영역의 에너지는 주파수 영역의 에너지와 같다는 것이며 그 결과 푸리에 변환을 거쳐도 에너지는 1:1로 보존된다.

다음 각 함수에 대한 푸리에 변환을 구하라.

(a) $te^{-at}u(t) \quad (a>0)$ (b) $\Lambda(t/T)$

☞ (a) 함수 $e^{-at}u(t)$의 라플라스 변환

$$\mathscr{F}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{a+i\omega}$$

에 식 (89) (b)의 '$-it$-곱하기↔미분'의 관계를 이용하면

$$(-it)e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{a+i\omega}\right) = -\frac{i}{(a+i\omega)^2}$$

$$\therefore \boxed{\mathscr{F}[te^{-at}u(t)] = \frac{1}{(a+i\omega)^2}}$$

(b) 삼각파함수와 구형함수의 관계는 다음과 같다(3장의 예제 3-15 참조)

$$\Lambda(t/T) = \Pi(t/T) * \Pi(t/T)$$

$$\therefore \boxed{\mathscr{F}[\Lambda(t/T)] = (\mathscr{F}[\Lambda(t/T)])^2 = T^2 \mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

(a) $e^{i\omega_o t}u(t)$

☞ (a) 이동 정리(식 (84)의 (a))를 이용한다. 즉

$$\mathscr{F}[u(t)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \qquad \text{(식 (78))}$$

이므로 식 (84)의 (a)에 의해

$$\boxed{\mathscr{F}[e^{i\omega_o t}u(t)] = \frac{1}{i(\omega-\omega_o)} + \pi\delta(\omega-\omega_o)}$$

[별해] 컨벌류션(식 (99)의 (b))를 이용하여 증명할 수도 있다. 먼저

$$\mathscr{F}[e^{i\omega_o t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_o)$$

이므로 식 (99)의 (b)에 의해

$$\mathscr{F}[e^{i\omega_o t}u(t)] = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_o) * \left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right)\right]$$

$$= \delta(\omega-\omega_o) * \frac{1}{i\omega} + \delta(\omega-\omega_o) * \pi\delta(\omega)$$

위의 식 우변은 식 (109)의 관계를 이용하면

$$\delta(\omega-\omega_o) * \frac{1}{i\omega} + \delta(\omega-\omega_o) * \pi\delta(\omega) = \frac{1}{i(\omega-\omega_o)} + \pi\delta(\omega-\omega_o)$$

$$\therefore \mathscr{F}[e^{i\omega_o t}u(t)] = \frac{1}{i(\omega-\omega_o)} + \pi\delta(\omega-\omega_o)$$

(b) $\cos\omega_o t u(t)$

(b) 오일러 공식과 문제 (a)의 결과를 이용하면

$$\mathscr{F}[\cos\omega_o t u(t)] = \frac{1}{2}\mathscr{F}[e^{i\omega_o t}u(t)] + \frac{1}{2}\mathscr{F}[e^{-i\omega_o t}u(t)]$$

$$= \frac{0.5}{i(\omega-\omega_o)} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_o)$$

$$+ \frac{0.5}{i(\omega+\omega_o)} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega+\omega_o)$$

따라서 위의 식을 정리하면

$$\boxed{\mathscr{F}[\cos\omega_o t u(t)] = \frac{\pi}{2}\delta(\omega+\omega_o) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_o) + \frac{i\omega}{\omega_o^2-\omega^2}}$$

(c) $\sin\omega_o t u(t)$

(c) 문제 (b)와 같은 방법으로 풀면 다음과 같다.

$$\mathscr{F}[\sin\omega_o t u(t)] = \frac{1}{i2}\mathscr{F}[e^{i\omega_o t}u(t)] - \frac{1}{i2}\mathscr{F}[e^{-i\omega_o t}u(t)]$$

$$= -\frac{0.5}{\omega-\omega_o} - \frac{i\pi}{2}\delta(\omega-\omega_o)$$

$$+\frac{0.5}{\omega+\omega_o} + \frac{i\pi}{2}\delta(\omega+\omega_o)$$

따라서 위의 식을 정리하면

$$\boxed{\mathscr{F}[\sin\omega_o t u(t)] = \frac{i\pi}{2}\delta(\omega+\omega_o) - \frac{i\pi}{2}\delta(\omega-\omega_o) + \frac{\omega_o}{\omega_o^2-\omega^2}}$$

(d) $u(\omega)$

(d) $u(\omega)$의 역변환은 식 (56)의 쌍대성을 이용하면

$$u(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$$

로부터 다음의 변환쌍을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{it} + \pi\delta(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi u(-\omega)$$

그리고 $u(-\omega)=1-u(\omega)$이므로

$$\mathscr{F}^{-1}[u(\omega)] = \mathscr{F}^{-1}[1-u(-\omega)] = \mathscr{F}^{-1}[1] - \mathscr{F}^{-1}[u(-\omega)]$$

$$= \delta(t) - \frac{1}{2\pi it} - \frac{1}{2}\delta(t)$$

$$\therefore \boxed{\mathscr{F}^{-1}[u(\omega)] = -\frac{1}{2\pi it} + \frac{1}{2}\delta(t)}$$

(e) $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \quad \left(단 \ \mathbf{F}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \neq 0 \right)$

(e) 식 (110)을 이용하면

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = f(t) * u(t)$$

이므로

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \mathscr{F}[f(t) * u(t)] = \mathscr{F}[f(t)] \cdot \mathscr{F}[u(t)]$$

여기서

$$\mathscr{F}[f(t)] \cdot \mathscr{F}[u(t)] = \mathbf{F}(\omega)\left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right) = \frac{\mathbf{F}(\omega)}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\mathbf{F}(\omega)$$

$$= \frac{\mathbf{F}(\omega)}{i\omega} + \pi\mathbf{F}(0)\delta(\omega)$$

$$\therefore \boxed{\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{\mathbf{F}(\omega)}{i\omega} + \underline{\pi\mathbf{F}(0)\delta(\omega)}}. \qquad \mathbf{(112)}$$

20. 선형시스템의 해석

시간상의 미분 $px(t)$는 s-영역에서는 $sX(s)$, 주파수영역에서는 $j\omega\mathbf{X}(\omega)$

$$\left.\begin{array}{ll} y(t) = H(p)w(t) & (\text{시간 영역}) \\ Y(s) = H(s)W(s) & (s-\text{영역}) \\ \mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{W}(\omega) & (\text{주파수 영역}) \end{array}\right\}$$

주파수응답 $\mathbf{H}(\omega) = H(s)\big|_{s=i\omega}$

$w(t)=\delta(t)$ $\quad \mathbf{H}(\omega)\mathbf{W}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\times 1 = \mathbf{H}(\omega)$ $\qquad h(t) = \mathscr{F}^{-1}[\mathbf{H}(\omega)]$

$|\mathbf{H}(\omega)|$를 **크기응답**이라 하고 편각 $\angle\mathbf{H}(\omega)$를 **위상응답**

$$\begin{tikzcd} & h(t) \arrow[dl, leftrightarrow, "\mathscr{L}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mathscr{F}"] & \\ H(s) \arrow[rr, leftrightarrow, "s=i\omega"'] & & \mathbf{H}(\omega) \end{tikzcd}$$

시스템의 입력 $w(t)$와 출력 $y(t)$의 관계가 다음과 같을 때 충격응답과 주파수 응답을 구하라.

$$y' + ay = aw \quad (a > 0)$$

☞ 전달함수 및 충격응답은

$$H(s) = \frac{a}{s+a}, \qquad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s+a}\right] = ae^{-at}u(t)$$

그리고 주파수응답은

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{a}{i\omega + a} \qquad \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = \left|\dfrac{a}{i\omega + a}\right| = \dfrac{a}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \\ \angle \mathbf{H}(\omega) = -\tan^{-1}(\omega/a) \end{cases}$$