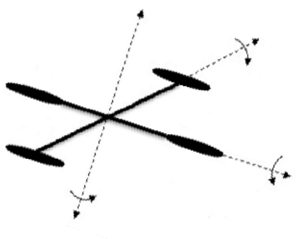
Fourier Series -1



- 고조파와 직교성

$$f(t+nT) = f(t), \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t) \qquad (\omega_o = 2\pi / T)}$$

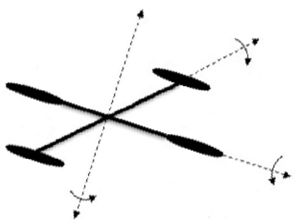
기본주기

임의의 주기함수

푸리에 계수
f(t)에 의해 결정

기본주파수

푸리에 급수는 주기가 T인 임의의 주기함수 f(t)를 기본주기가 T인 고조파들의 선형합으로 표현하고자 하는 것



$$C_n = \cos n\omega_o t, \quad S_n = \sin n\omega_o t$$

$$
\begin{aligned}
&\textbf{(a)} \quad S_m S_n = \frac{1}{2}(C_{m-n} - C_{m+n}) \\
&\textbf{(b)} \quad C_m C_n = \frac{1}{2}(C_{m-n} + C_{m+n}) \\
&\textbf{(c)} \quad S_m C_n = \frac{1}{2}(S_{m-n} + S_{m+n}) \\
&\textbf{(d)} \quad S_{2n} = 2S_n C_n \\
&\textbf{(e)} \quad C_{2n} = C_n^2 - S_n^2 \\
&\textbf{(f)} \quad S_n^2 = \frac{1 - C_{2n}}{2} \\
&\textbf{(g)} \quad C_n^2 = \frac{1 + C_{2n}}{2}
\end{aligned}
$$

$$\int_T \mathrm{S}_n dt = \int_T \mathrm{C}_n dt = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$\int_T \mathrm{S}_m \mathrm{S}_n dt = \frac{1}{2}\int_T \mathrm{C}_{m-n} dt - \frac{1}{2}\int_T \mathrm{C}_{m+n} dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ T/2 & (m = n) \end{cases}$$

$$\int_T \mathrm{C}_m \mathrm{C}_n dt = \frac{1}{2}\int_T \mathrm{C}_{m-n} dt + \frac{1}{2}\int_T \mathrm{C}_{m+n} dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ T/2 & (m = n) \end{cases}$$

$$\int_T \mathrm{S}_m \mathrm{C}_n dt = \frac{1}{2}\int_T \mathrm{S}_{m-n} dt + \frac{1}{2}\int_T \mathrm{S}_{m+n} dt = 0$$

서로 다른 두 고조파를 곱하여 기본주기 동안 적분하면 0 이 된다. → 직교성

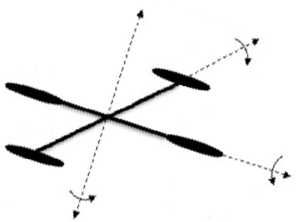
- 삼각 푸리에 급수

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t) \qquad (\omega_o = 2\pi / T)$$

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mathrm{C}_n + b_n \mathrm{S}_n)}$$

$$\begin{aligned}
\int_T f(t)\mathrm{C}_m dt &= \frac{a_0}{2}\int_T \mathrm{C}_m dt + \int_T \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mathrm{C}_m \mathrm{C}_n + b_n \mathrm{C}_m \mathrm{S}_n) dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_T (a_n \mathrm{C}_m \mathrm{C}_n + b_n \mathrm{C}_m \mathrm{S}_n) dt \\
&= a_m \int_T \mathrm{C}_m \mathrm{C}_m dt = \frac{T a_m}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{a_m = \frac{2}{T} \int_T f(t) \mathrm{C}_m dt}$$



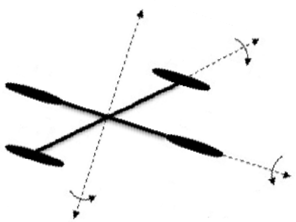
$$\int_T f(t)\mathrm{S}_m dt = \frac{a_0}{2}\int_T \mathrm{S}_m dt + \int_T \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \mathrm{S}_m \mathrm{C}_n + b_n \mathrm{S}_m \mathrm{S}_n)dt$$

$$= b_m \int_T \mathrm{S}_m \mathrm{S}_m dt$$

$$= \frac{Tb_m}{2}$$

$$\boxed{b_m = \frac{2}{T}\int_T f(t)\mathrm{S}_m dt}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \mathrm{C}_n + b_n \mathrm{S}_n) \\ &\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T f(t)dt \\ a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T f(t)\mathrm{C}_n dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T f(t)\mathrm{S}_n dt \end{cases} \end{aligned}}$$



- 대칭함수

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \mathrm{C}_n + b_n \mathrm{S}_n)$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T f(t)dt \\ a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T f(t)\mathrm{C}_n dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T f(t)\mathrm{S}_n dt \end{cases}$$

우함수	기함수
$\begin{cases} f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{C}_n \\ a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{C}_n dt \quad (n \geq 0) \end{cases}$	$\begin{cases} f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{S}_n \\ b_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{S}_n dt \quad (n \geq 1) \end{cases}$

예제 5-1 그림 5-1의 각 주기함수에 대한 푸리에 계수를 구하라.

☞ (a) $f(t)$가 우함수이므로 코사인 계수 a_n만 구하면 된다.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt \\
&= \frac{4}{T}\int_0^{T/4} 1dt - \frac{4}{T}\int_{T/4}^{T/2} 1dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

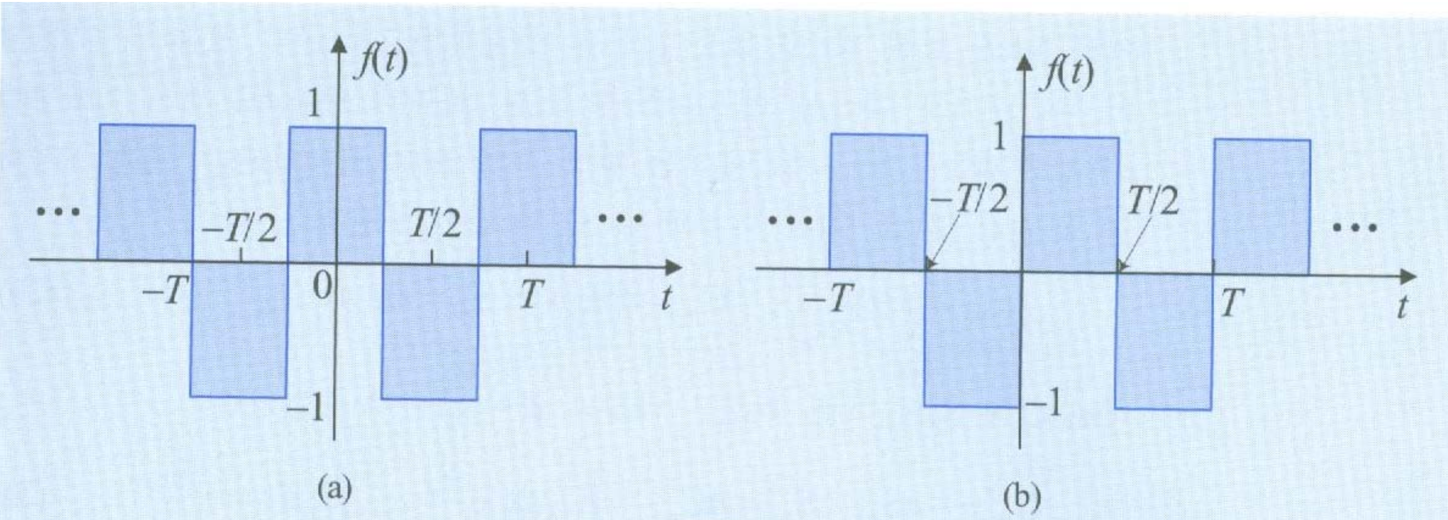


그림 5-1

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{C}_n dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/4} \mathrm{C}_n dt - \frac{4}{T}\int_{T/4}^{T/2} \mathrm{C}_n dt$$

$$= \frac{4\sin n\omega_o t}{T(n\omega_o)}\Bigg|_0^{T/4} - \frac{4\sin n\omega_o t}{T(n\omega_o)}\Bigg|_{T/4}^{T/2}$$

$$= \frac{4\sin 0.5n\pi}{n\pi}$$

$$\therefore f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{C}_1 - \frac{\mathrm{C}_3}{3} + \frac{\mathrm{C}_5}{5} - \frac{\mathrm{C}_7}{7} + \cdots\right)$$

(b) $f(t)$가 기함수이므로 사인 계수 b_n만 구하면 된다.

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{S}_n dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \mathrm{S}_n dt = -\frac{4\cos n\omega_o t}{T(n\omega_o)}\Bigg|_0^{T/2}$$

$$= \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

$$= \begin{cases} 4/(n\pi) & (n = \text{홀수}) \\ 0 & (n = \text{짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{S}_1 + \frac{\mathrm{S}_3}{3} + \frac{\mathrm{S}_5}{5} + \cdots\right)$$

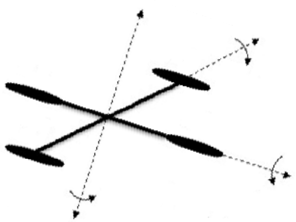
예제 5-1을 통해 알 수 있듯이 삼각 푸리에계수를 구할 때 $\omega_o T(=2\pi)$ 항이 나타나므로 계산상 번거로울 수 있다. 따라서 $x=\omega_o t$로 변수 치환하면 t-축상의 주기 T는 x-축상에서는 항상 주기 2π로 정규화된다. 이를 이용하면 식 (14) 및 표 5-1은 다음의 표 5-2와 같이 표현된다. 단

$$\boxed{f(x) = f(t)\Big|_{t=\frac{x}{\omega_o}}, \quad \mathrm{C}_n = \cos nx, \quad \mathrm{S}_n = \sin nx} \tag{20}$$

이며 C_n과 S_n의 미분, 적분은 다음과 같이 간단히 표현된다.

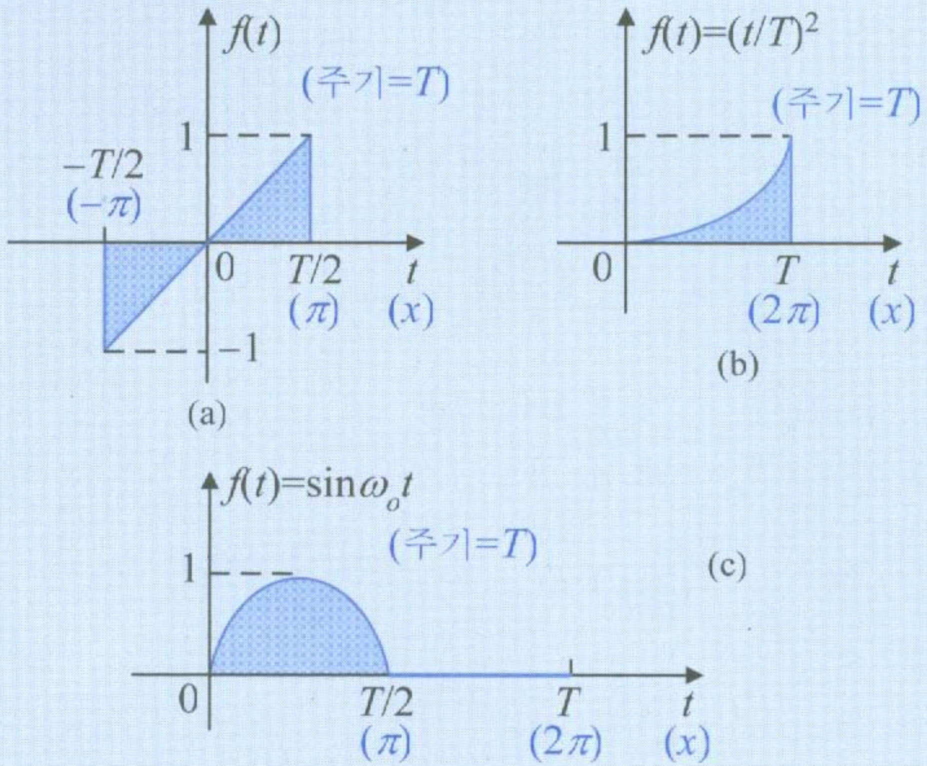
$$\boxed{\mathrm{C}_n{}' = -n\mathrm{S}_n, \quad \mathrm{S}_n{}' = n\mathrm{C}_n, \quad \int \mathrm{C}_n dx = \frac{\mathrm{S}_n}{n}, \quad \int \mathrm{S}_n dx = -\frac{\mathrm{C}_n}{n}} \tag{21}$$

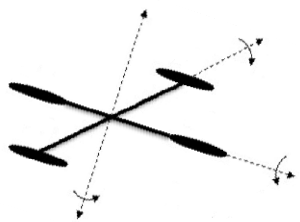
함수 $f(x)$	삼각 푸리에 급수
일반적	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\mathrm{C}_n+b_n\mathrm{S}_n)$ $\begin{cases} a_0=\frac{1}{\pi}\int_{2\pi}f(x)dx \\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{2\pi}f(x)\mathrm{C}_n dx \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{2\pi}f(x)\mathrm{S}_n dx \end{cases}$
우함수	$\begin{cases} f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{C}_n \\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{C}_n dx \quad (n\geq 0) \end{cases}$
기함수	$\begin{cases} f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\mathrm{S}_n \\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{S}_n dx \quad (n\geq 1) \end{cases}$

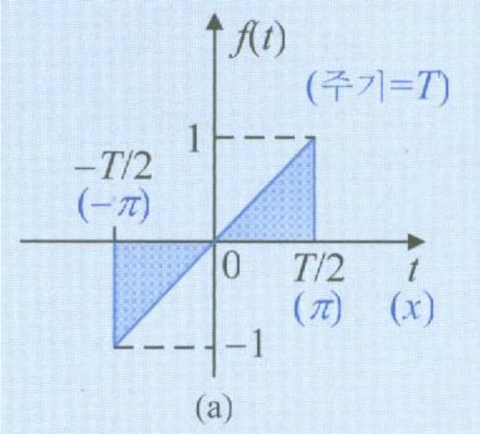


예제 5-2 그림 5-2의 각 주기함수에 대한 푸리에 계수를 구하라.

그림 5-2







(a)

(a) $f(t)$가 기함수이므로 사인 계수 b_n만 구하면 된다.

$$f(t) = (2/T)t \quad \rightarrow \quad f(x) = x/\pi$$

부분적분을 이용하면

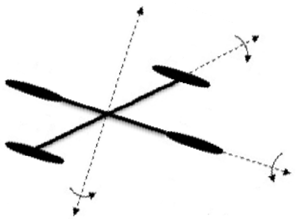
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{S}_n dx = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\mathrm{S}_n dx$$

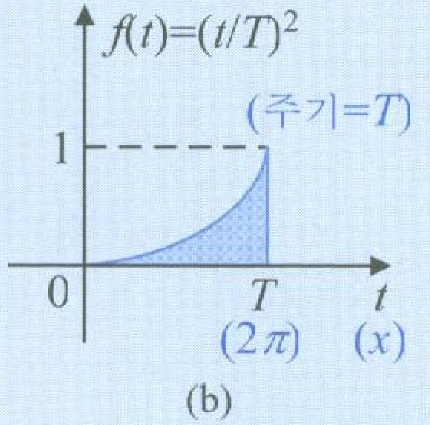
$$= \frac{2}{\pi^2}\left[x\left(\frac{\mathrm{C}_n}{-n}\right) - \frac{\mathrm{S}_n}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{\pi\cos n\pi}{-n}\right]$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n\pi}$$

$$= \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

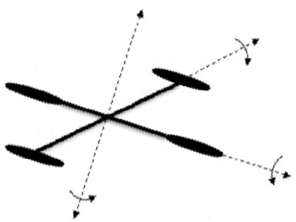




(b)

(b) $f(t)$ 및 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(t)=\left(\frac{t}{T}\right)^2 \rightarrow f(x)=\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi^2}$$



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi^2}x^2dx=\frac{1}{4\pi^3}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{2\pi}=2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi^2}x^2\mathrm{C}_n dx$$

$$=\frac{1}{4\pi^3}\left[x^2\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)-2x\left(\frac{\mathrm{C}_n}{-n^2}\right)-2\left(\frac{\mathrm{S}_n}{-n^3}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{4\pi^3}\left[\frac{2x\mathrm{C}_n}{n^2}\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}$$

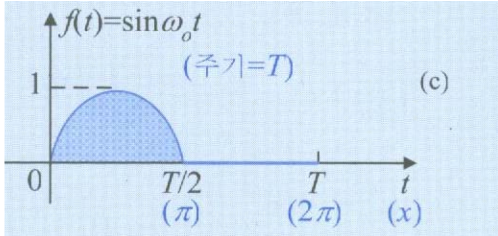
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi^2}x^2\mathrm{S}_n dx$$

$$=\frac{1}{4\pi^3}\left[x^2\left(\frac{\mathrm{C}_n}{-n}\right)-2x\left(\frac{\mathrm{S}_n}{-n^2}\right)-2\left(\frac{\mathrm{C}_n}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{4\pi^3}\left[x^2\left(\frac{\mathrm{C}_n}{-n}\right)-2\left(\frac{\mathrm{C}_n}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{4\pi^3}\left[\left(\frac{(2\pi)^2}{-n}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{n\pi}$$



(c) $f(t)$ 및 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases}\sin\omega_o t & (0\le t\le T/2)\\ 0 & (T/2\le t\le T)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\sin x = S_1 & (0\le x\le \pi)\\ 0 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S_1 dx = -\frac{C_1}{\pi}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S_1 C_n dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} S_{1-n}dx+\int_0^{\pi} S_{1+n}dx\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{C_{1-n}}{n-1}-\frac{C_{1+n}}{n+1}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}-\frac{\cos(n+1)\pi-1}{n+1}\right]\end{aligned}$$

여기서

$$\cos(n+1)\pi-1=\begin{cases}0 & (n=\text{홀수})\\ -2 & (n=\text{짝수})\end{cases}$$

이므로

$$a_n=\begin{cases}0 & (n=\text{홀수})\\ -\dfrac{2}{\pi(n-1)(n+1)} & (n=\text{짝수})\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S_1 S_n dx=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} C_{1-n}dx-\int_0^{\pi} C_{1+n}dx\right]$$

이므로 n=1인 경우는

$$b_1=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} 1dx-\int_0^{\pi} C_{1+n}dx\right]=\frac{1}{2\pi}\left[x-\frac{S_{1+n}}{1+n}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}$$

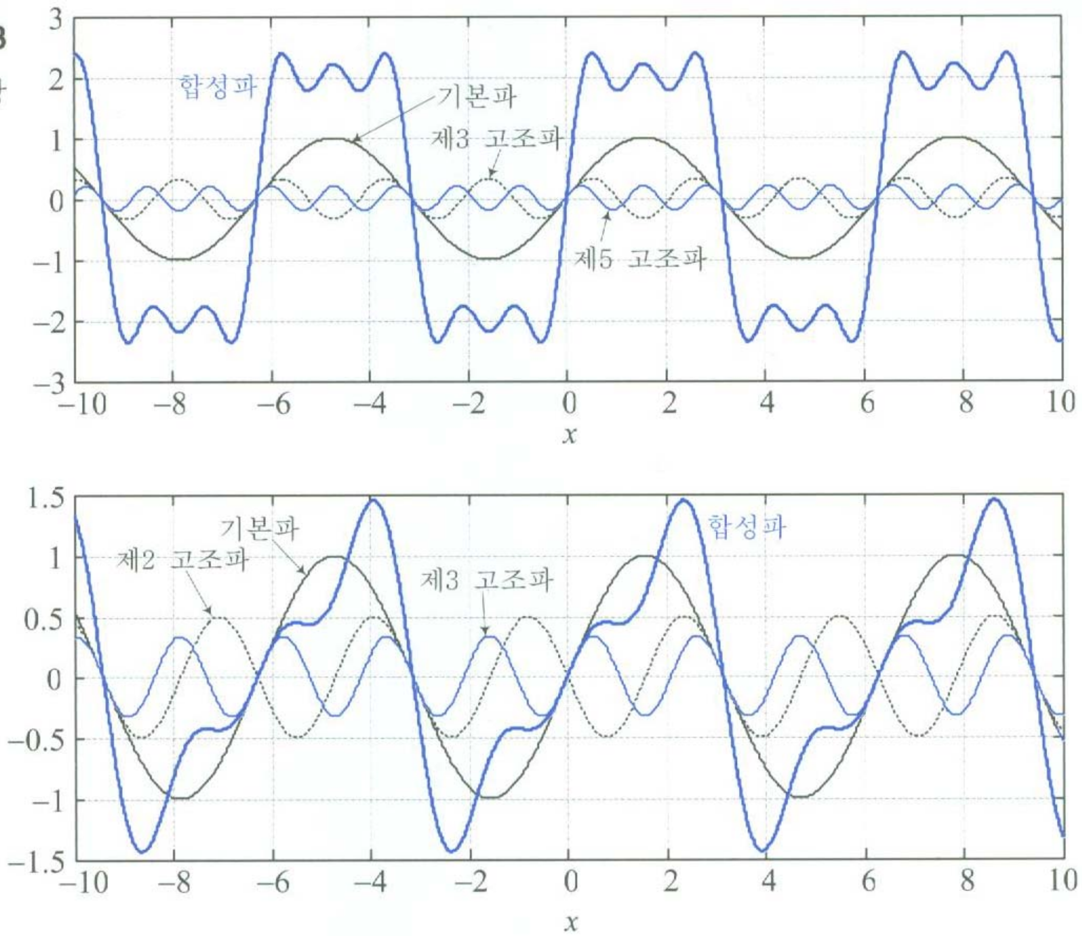
그리고 $n\ge 2$인 경우는

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} C_{1-n}dx-\int_0^{\pi} C_{1+n}dx\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{S_{1-n}}{1-n}-\frac{S_{1+n}}{n+1}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\pi}{n-1}-\frac{\sin(n+1)\pi}{n+1}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

깁스 현상

그림 5-1(b)에서 구형파의 제 5 고조파까지 합성한 파형과 그림 5-2(a)에서 톱니파의 제 3 고조파까지 합성한 파형이 그림 5-3이다. 어느 경우나 파형이 급격히 변하는 부분을 중심으로 대칭적인 진동이 생기며 이를 **깁스(Gibbs) 현상**이라 한다.

그림 5-3
깁스 현상



- 지수 푸리에 급수

$$\boxed{e^{inx} = \cos nx + i \sin nx = C_n + iS_n}$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad S_n = \frac{1}{i2}(e^{inx} - e^{-inx})}$$

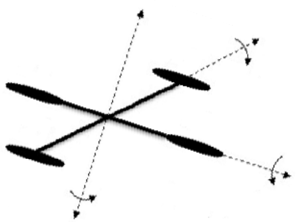
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n C_n + b_n S_n)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{i2} \right) \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{i2} \right) e^{inx} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{i2} \right) e^{-inx} \right]$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{inx} + c_n^{*} e^{-inx}]$$

$$\boxed{= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}]} \qquad c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{i2}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$$



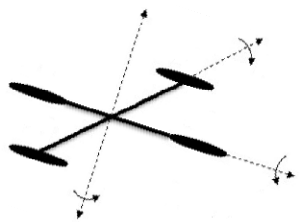
$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{inx}$$

$$\boxed{= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}}$$

직교성을 만족함 $\displaystyle\int_{2\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 2\pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$



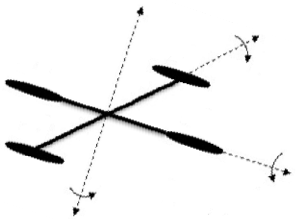
$$\int_{2\pi} f(x)e^{-imx}dx = \int_{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} e^{-imx} dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\int_{2\pi} e^{inx} e^{i(n-m)x} dx \right]$$

$$= 2\pi c_m$$

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(x) e^{-imx} dx$$

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\ c_n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{cases} \qquad \begin{cases} f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_o t} \\ c_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{T} f(t) e^{-in\omega_o t} dt \end{cases}}$$



$$a_n = 2\,\mathrm{Re}[c_n], \quad b_n = -2\,\mathrm{Im}[c_n]$$

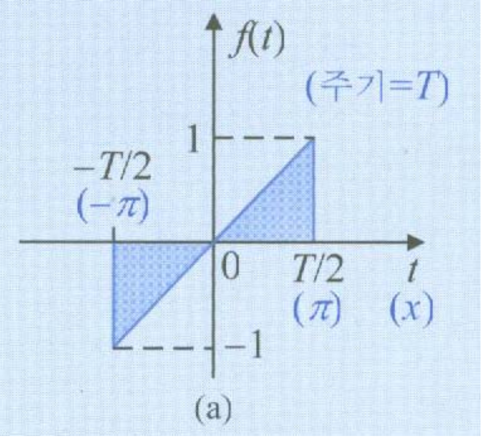


그림 5-2(a) 톱니파를 지수 푸리에 급수로 전개하라.

☞ $f(x)=x/\pi$이므로 지수 푸리에 계수는 다음과 같이 부분적분으로 구한다.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\frac{1}{\pi}xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}xe^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left[x\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\right)-\left(\frac{e^{-inx}}{-n^2}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left[-\frac{\pi}{in}(e^{-in\pi}+e^{in\pi})+\frac{1}{n^2}(e^{-in\pi}-e^{in\pi})\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left[-\frac{\pi}{in}2\cos n\pi-\frac{i2}{n^2}\sin n\pi\right]$$

$$= \frac{1}{in\pi}(-1)^{n+1}$$

따라서 지수 푸리에 급수는 다음과 같다.

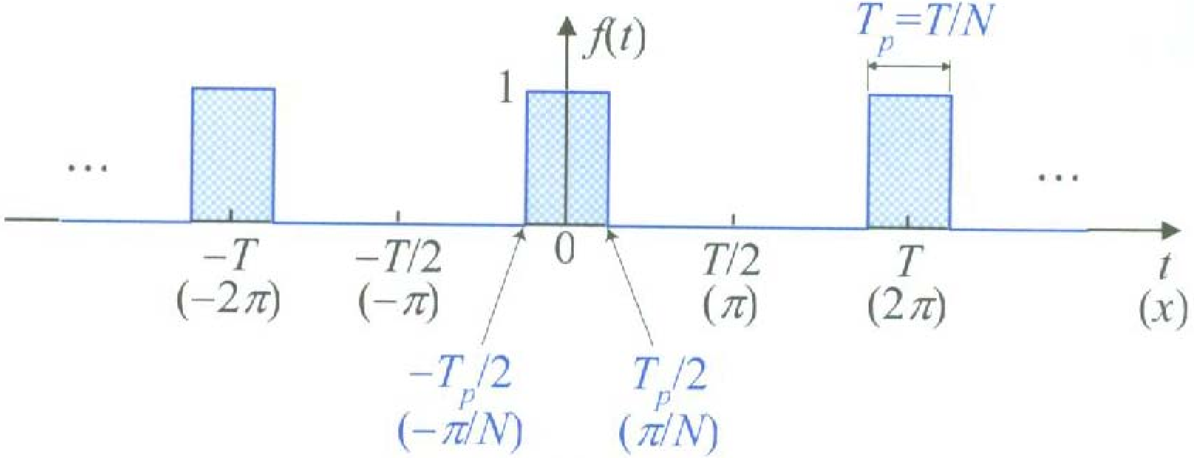
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{in\pi}e^{inx}$$

예제 5-2(a)에서

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

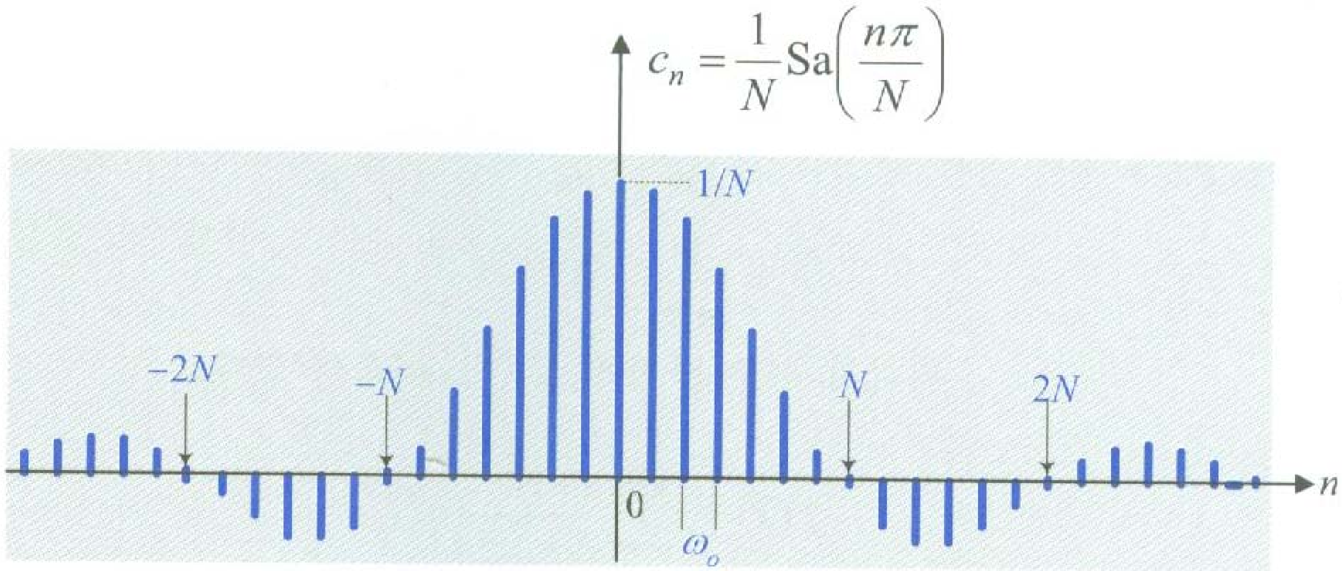
이므로 식 (25)의 관계인 다음을 확인할 수 있다.

$$c_n = \frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{i2} = \frac{1}{in\pi}(-1)^{n+1}$$



f(t)
1
T_p = T/N
…
…
−T
(−2π)
−T/2
(−π)
0
T/2
(π)
T
(2π)
t
(x)
−T_p/2
(−π/N)
T_p/2
(π/N)

(a)

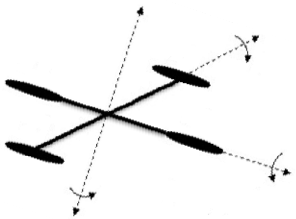


c_n = (1/N) Sa(nπ/N)
1/N
−2N
−N
N
2N
0
ω_o
n

(b)

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\le \pi/N)\\ 0 & (|x|>\pi/N)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/N}^{\pi/N} e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi/N}^{\pi/N}\\ &= \frac{1}{-i2n\pi}\left[e^{-in\pi/N}-e^{in\pi/N}\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= \frac{\sin(n\pi/N)}{n\pi}\end{aligned}$$



$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\le \pi/N)\\ 0 & (|x|>\pi/N)\end{cases}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/N}^{\pi/N} e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi/N}^{\pi/N} \\ &= \frac{1}{-i2n\pi}\left[e^{-in\pi/N}-e^{in\pi/N}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\sin(n\pi/N)}{n\pi} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$c_n = \frac{\sin(n\pi/N)}{n\pi} = \frac{1}{N}\frac{\sin(n\pi/N)}{n\pi/N} = \frac{1}{N}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{N}\right)$$

$$c_n = \frac{1}{N}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{N}\right), \quad c_0 = \frac{1}{N}$$

- 파스발의 정리

식 (27)과 같은 e^{inx}의 직교성을 이용하면 $f(x)$의 평균 전력을 지수 푸리에 계수로 간단히 나타낼 수 있다. 주기가 2π인 임의의 복소함수 $f(x)$의 평균 전력 P_f는 다음과 같이 정의한다.

$$P_f = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} f(x)f^*(x)dx \tag{39}$$

식 (30)의 지수 푸리에급수에서 $f(x)$에 그의 공액인 $f^*(x)$를 곱하여 한 주기 2π에 걸쳐 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_{2\pi} f(x)f^*(x)dx &= \int_{2\pi}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m c_n^* e^{i(m-n)x}\right]dx \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m c_n^*\left[\int_{2\pi} e^{i(m-n)x}dx\right]\end{aligned} \tag{40}$$

위의 식 두 번째 등식은 첫 번째 등식에서 합과 적분의 순서를 바꾼 결과이다. 위의 식 우변 적분에 식 (27)의 직교성을 적용하면

$$\int_{2\pi} f(x) f^*(x) dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{41}$$

따라서 다음과 같은 중요한 관계를 얻을 수 있다.

$$\boxed{P_f = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2} \tag{42}$$

위의 식이 의미하는 바는 주기함수의 평균 전력은 지수 푸리에계수의 자승을 합한 것과 같다는 것이며 이를 **파스발(Parseval) 정리**라 한다. 파스발 정리에는 "시간 영역상의 전력이 주파수 영역상에서도 1:1로 보존된다"는 매우 중요한 뜻이 담겨있다. 파스발 정리는 삼각 푸리에급수에도 성립된다. 즉 식 (25)로부터

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{43}$$

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{43}$$

이므로 식 (42)에서

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \tag{44}$$

여기서 푸리에 계수가 의미하는 바를 좀 더 살펴보자. 표 5-2의 삼각 푸리에급수 경우 사인과 코사인 항의 합을 하나의 코사인으로 합성하면

$$\boxed{\begin{aligned} a_n\mathrm{C}_n + b_n\mathrm{S}_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\cos\left(nx + \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}\right) \\ &= \frac{|c_n|}{2}\cos(nx + \phi_n) \end{aligned}} \tag{45}$$

단 $\phi_n = \tan^{-1}(b_n/a_n)$이므로