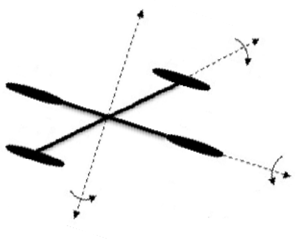
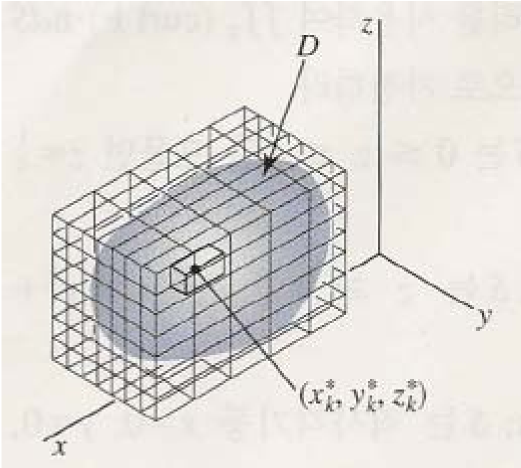
9장 벡터의 미적분
(13)



-. 삼중적분 - 소개



w=F (x, y, z)

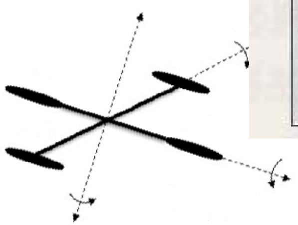
1. F는 공간의 닫힌 유계 영역(closed and bounded region) D에서 정의된다.
2. 좌표 평면에 평행한 수평면과 수직면의 3차원 격자에 의하여, 영역 D의 분할(partition) P는 D 안에 완전히 포함되는 부피 ΔV_k인 n개의 부분영역(상자) D_k를 형성한다.
3. $\|P\|$는 분할의 놈(norm), 즉 가장 긴 D_k의 대각선 길이이다.
4. 각 부분영역 D_k에서 점 (x_k^*, y_k^*, z_k^*)를 선택한다.
5. 합 $\sum_{k=1}^{n} (x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$를 구성한다.

정의 9.13 **삼중적분**

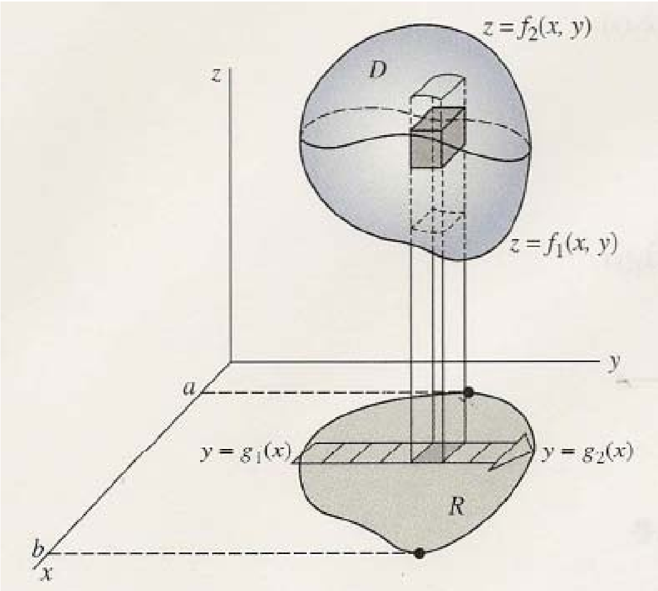
함수 F가 공간의 닫힌 영역 D에서 정의된 3변수 함수이면 **D에 대한 F의 삼중적분은**

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, \Delta V_k \qquad (1)$$

이다.



-. 삼중적분 – 반복적분에 의한 계산



$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} F(x, y, z)\, dz \right] dA$$

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

-. 삼중적분 – 응용

부피

$F(x, y, z)=1$일 때 입체 D의 **부피**:

$$V = \iiint_D dV$$

질량

$\rho(x, y, z)$이 밀도일 때 입체 D의 **질량**:

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV$$

1차 모멘트

하첨자로 나타낸 좌표 평면에 대한 입체의 **1차 모멘트:**

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z)\, dV \qquad M_{xz} = \iiint_D y\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho(x, y, z)\, dV$$

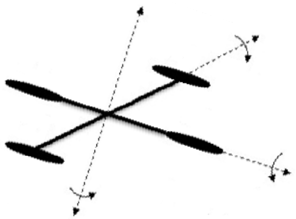
질량중심

입체 D의 **질량중심**의 좌표:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

중심

$\rho(x, y, z)=$ 상수이면 질량중심은 입체의 **중심**이 된다.



2차 모멘트

하첨자로 표시된 좌표축에 대한 D의 **2차 모멘트** 또는 **관성모멘트**:

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

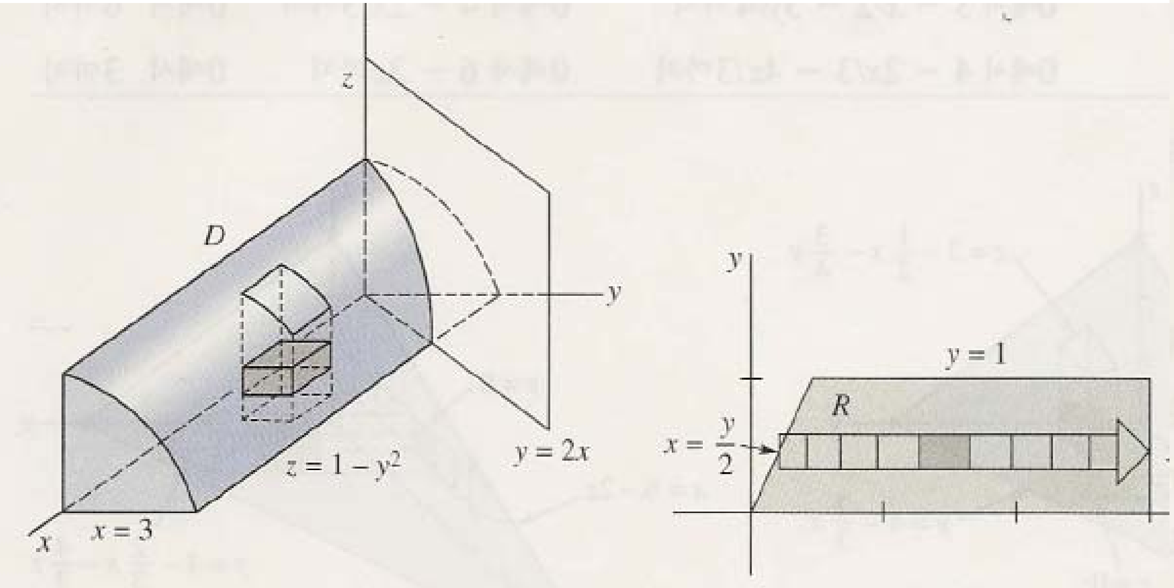
회전반지름

9.10절에서와 같이 I가 주어진 축에 대한 관성모멘트이면 **회전반지름**은

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

예제 1 입체의 부피

제1팔분공간에서 $z=1-y^2$, $y=2x$, $x=3$ 으로 둘러싸인 입체의 부피를 구하라.



(a) (b)

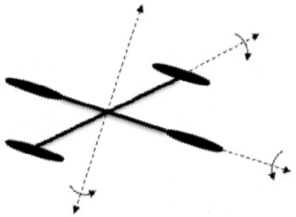
$$V = \iiint_D dV = \int_0^1 \int_{y/2}^3 \int_0^{1-y^2} dz\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_{y/2}^3 (1-y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \Big[x - xy^2\Big]_{y/2}^3 dy$$

$$= \int_0^1 \left(3 - 3y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3\right) dy$$

$$= \left[3y - y^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^4\right]_0^1 = \frac{15}{8}$$



예제 2 적분 순서 바꾸기

$$\int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{3-x/2-3y/4} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

의 적분순서를 $dy\, dx\, dz$ 으로 바꾸라.

풀이 그림 9.126(a)와 같이 영역 D는 제1팔분공간에서 세 좌표 평면과 평면 $2x+3y+4z=12$을 경계로 하는 입체이다. 그림 9.126(b)와 표를 이용하면

$$\int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{3-x/2-3y/4} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \int_0^3 \int_0^{6-2z} \int_0^{4-2x/3-4z/3} F(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$$

이다.

적분 순서	첫 번째 적분	두 번째 적분	세 번째 적분
$dz\, dy\, dx$	0에서 $3 - x/2 - 3y/4$까지	0에서 $4 - 2x/3$까지	0에서 6까지
$dy\, dx\, dz$	0에서 $4 - 2x/3 - 4z/3$까지	0에서 $6 - 2z$까지	0에서 3까지

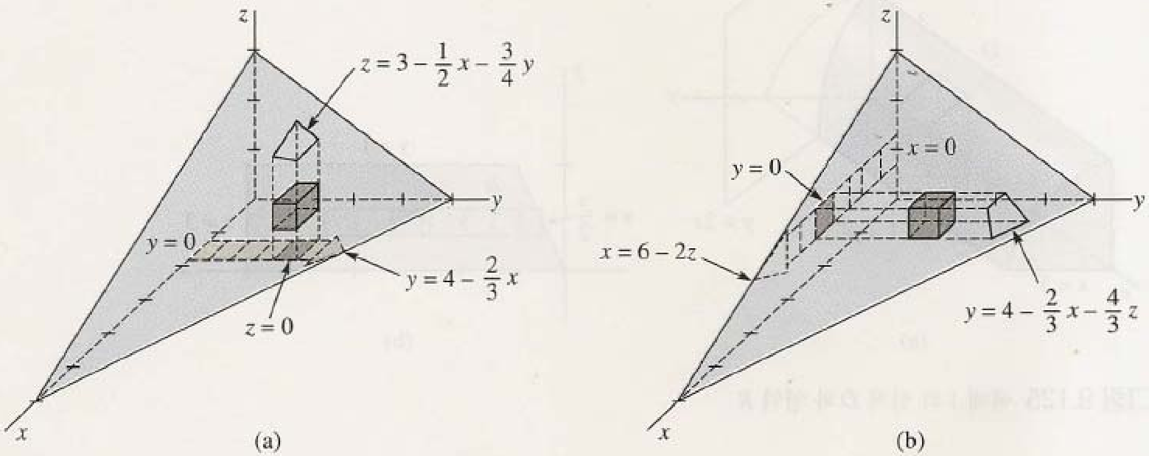
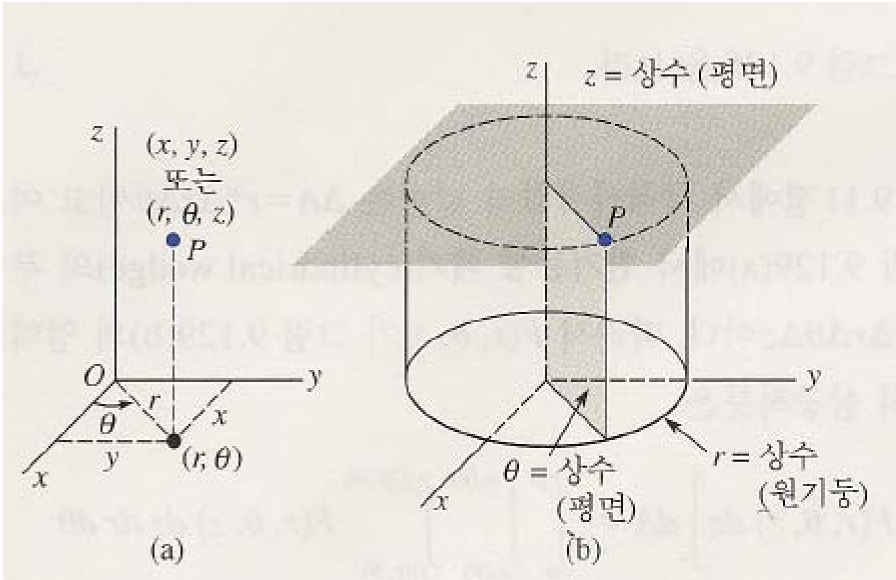


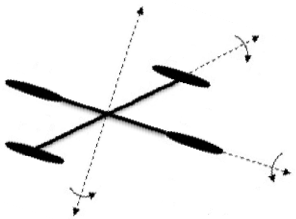
그림 9.126 예제 2의 적분 순서 바꾸기

-. 원기둥좌표계



$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z$$



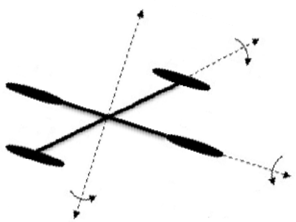
예제 3 원기둥좌표를 직교좌표로 변환

원기둥좌표 $(8, \pi/3, 7)$을 직교좌표로 바꾸라.

풀이 (3)에서

$$x = 8\cos\frac{\pi}{3} = 4, \quad y = 8\sin\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}, \quad z = 7$$

이다. 그러므로 $(8, \pi/3, 7)$은 직교좌표로 $(4, 4\sqrt{3}, 7)$과 같다. ❑



예제 4 **직교좌표를 원기둥좌표로 변환**

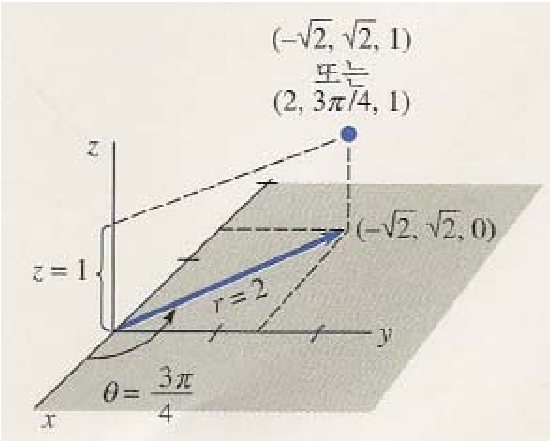
직교좌표$(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$을 원기둥좌표로 변환하라.

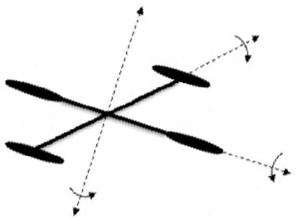
풀이 (4)에서

$$r^2 = (-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4, \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1, \quad z = 1$$

이다. 만약 $r=2$를 택하면, $x < 0$과 $y > 0$이므로 $\theta=3\pi/4$* 이다. 따라서 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$은

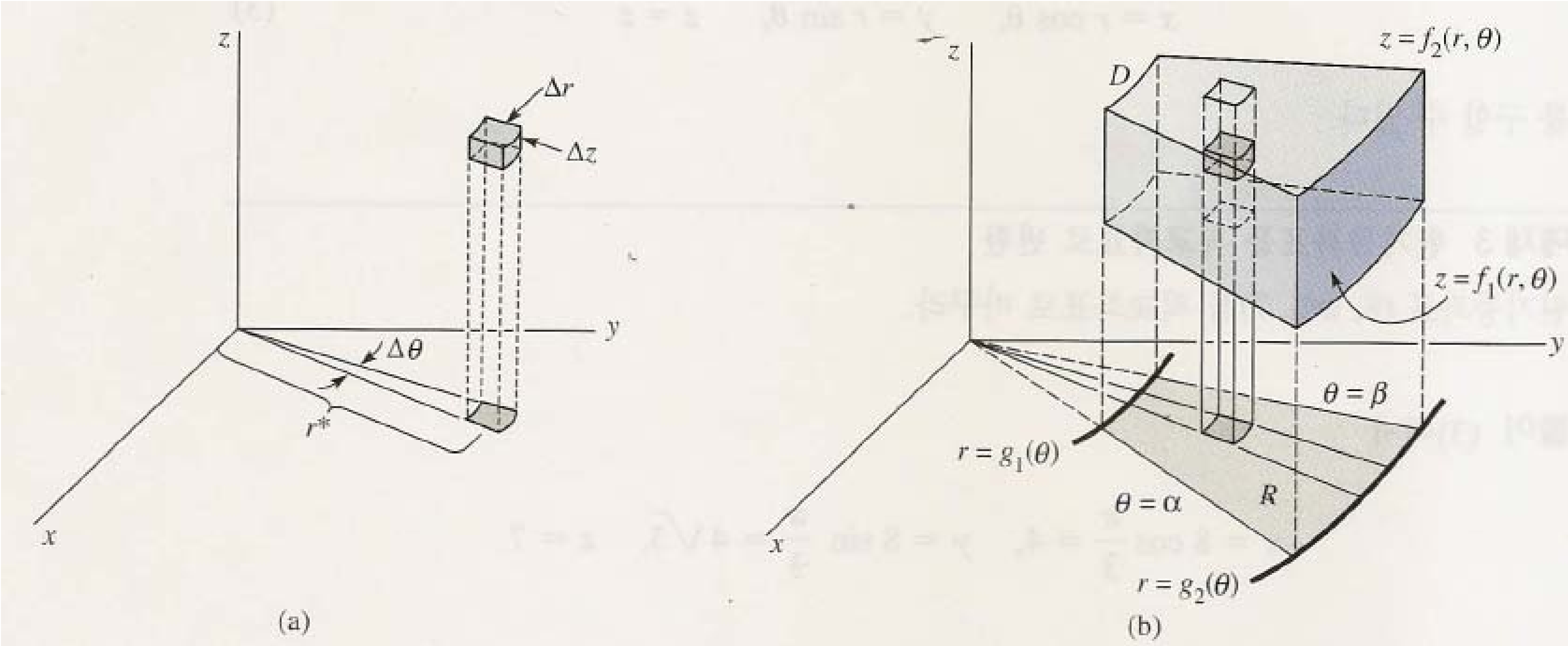
원기둥좌표로 $(2, 3\pi/4, 1)$과 같다. 그림 9.128을 보라.



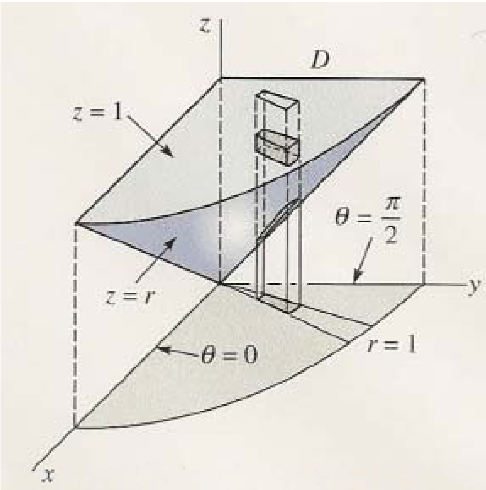


-. 원기둥좌표계 삼중적분

$$\iiint_D F(r,\theta,z)\,dV = \iint_R \left[\int_{f_1(r,\theta)}^{f_2(r,\theta)} F(r,\theta,z)\,dz\right] dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(r,\theta)}^{f_2(r,\theta)} F(r,\theta,z)\,dz\,dr\,d\theta$$



(a) (b)



예제 5 질량중심

제1팔분공간에서 원추 $z=\sqrt{x^2+y^2}$과 평면 $z=1$, $x=0$, $y=0$으로 둘러싸인 입체가 있다. 입체의 밀도가 $\rho(r, \theta, z)=r$일 때, 질량중심을 구하라.

풀이 (4)에 의하여 원추의 방정식은 $z=r$이다. 따라서 그림 9.130에서

$$m = \iiint_D r\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r(r\,dz\,dr\,d\theta)$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2 z\Big]_r^1 dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2 - r^3)\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{24}$$

$$M_{xy} = \iiint_D zr\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 zr^2\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left. \frac{z^2}{2} r^2 \right]_r^1 dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2 - r^4)\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{30}$$

이다. M_{xz} 와 M_{yz} 를 구하는 적분에서는 $y = r \sin\theta$ 와 $x = r \cos\theta$ 를 사용하면

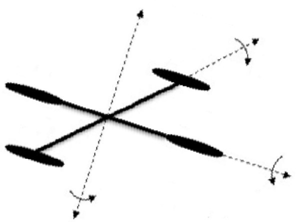
$$M_{xz} = \iiint_D r^2 \sin\theta\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 r^3 \sin\theta\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left. r^3 z \sin\theta \right]_r^1 dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^3 - r^4) \sin\theta\, dr\, d\theta = \frac{1}{20}$$

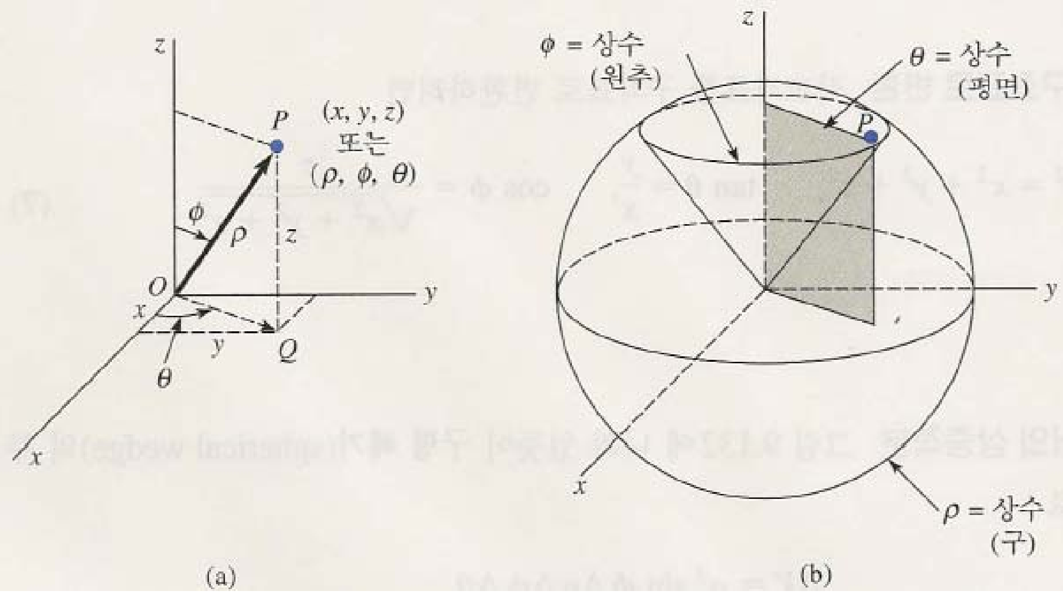
$$M_{yz} = \iiint_D r^2 \cos\theta\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 r^3 \cos\theta\, dz\, dr\, d\theta = \frac{1}{20}$$

이다. 따라서



$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} \approx 0.38, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} \approx 0.38, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\pi/30}{\pi/24} \approx 0.8$$

-. 구좌표계



$$x = \| \overrightarrow{OQ} \| \cos\theta, \qquad y = \| \overrightarrow{OQ} \| \sin\theta, \qquad z = \| \overrightarrow{OP} \| \cos\phi$$

이고, $|\overrightarrow{OQ}| = \rho\sin\phi$, $|\overrightarrow{OP}| = \rho$이므로

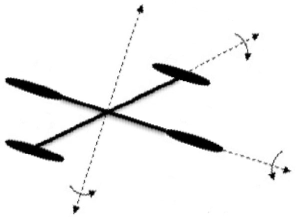
$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

이다. 여기서 $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$로 택한다. 또한 $|\overrightarrow{OQ}| = \rho\sin\phi = r$이므로

$$r = \rho\sin\phi, \qquad \theta = \theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

는 구좌표 (ρ, ϕ, θ)를 원기둥좌표 (r, θ, z)로 변환한다.

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad \cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



예제 6 구좌표를 직교좌표와 원기둥좌표로 변환

구좌표 $(6, \pi/4, \pi/3)$를 직교좌표와 원기둥좌표로 바꾸라.

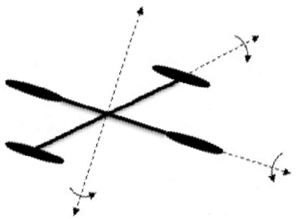
풀이 $\rho=6, \phi=\pi/4, \theta=\pi/3$ 이므로 (5)에서 점의 직교좌표는

$$x = 6\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad y = 6\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{2}, \quad z = 6\cos\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}$$

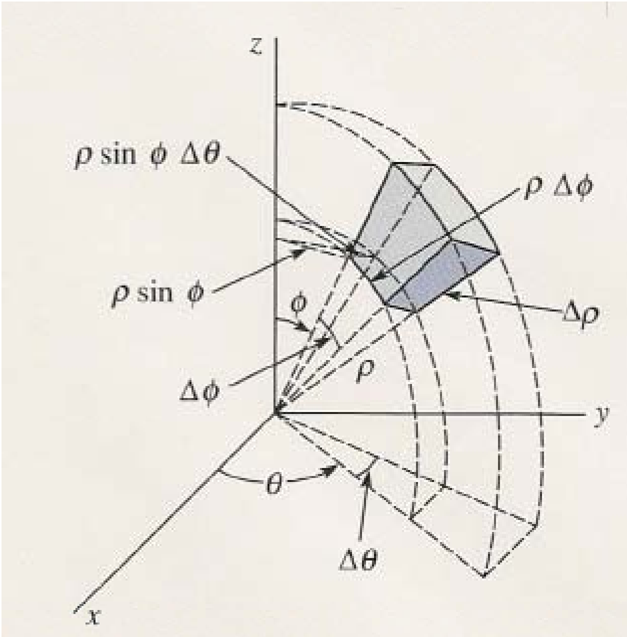
이다. 한편 (6)에서

$$r = 6\sin\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \quad z = 6\cos\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}$$

이므로 이 점의 원기둥좌표는 $(3\sqrt{2}, \pi/3, 3\sqrt{2})$이다. ❑



-. 구좌표계에서 삼중적분



$$\Delta V \approx \rho^2 \sin\phi \, \Delta\rho \, \Delta\phi \, \Delta\theta$$

$$dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$\iiint_D F(\rho, \phi, \theta)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(\phi, \theta)}^{f_2(\phi, \theta)} F(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

예제 7 관성모멘트

두 개의 구

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{그리고} \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \qquad a < b$$

로 둘러싸인 균질성 입체의 z축에 대한 관성모멘트를 구하라.

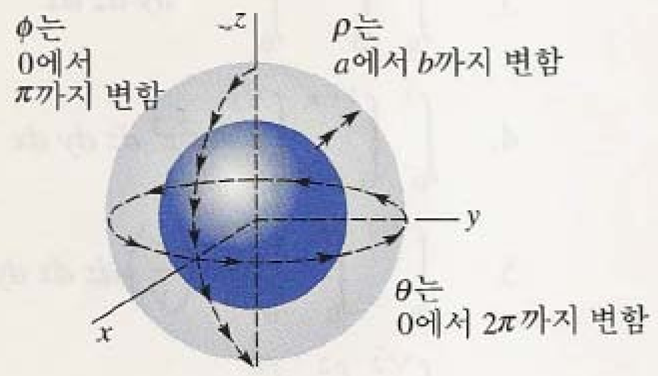


그림 9.133 예제 7의 적분 구간

풀이 밀도를 $\delta(\rho, \phi, \theta) = k$(상수)로 놓으면*

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\, k\, dV$$

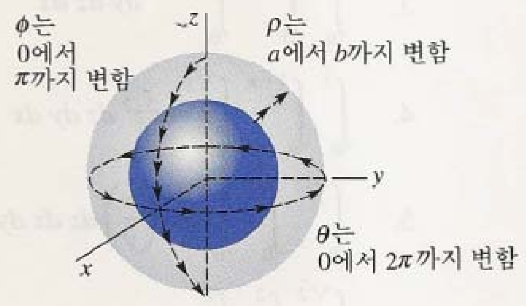


그림 9.133 예제 7의 적분 구간

이다. (5)에서 $x^2+y^2=\rho^2 \sin^2 \phi$, $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ 이다. 그러므로 구의 방정식은 단순히 $\rho=a$ 와 $\rho=b$ 이다. 그림 9.133 을 보라. 결과적으로 구좌표계를 사용하면

$$\begin{aligned}
I_z &= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \rho^2 \sin^2\phi(\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta) \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \rho^4 \sin^3\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho^5}{5}\sin^3\phi \Big]_a^b \, d\phi \, d\theta \\
&= \frac{k}{5}(b^5-a^5)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\phi)\sin\phi \, d\phi \, d\theta \\
&= \frac{k}{5}(b^5-a^5)\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi+\frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi} d\theta \\
&= \frac{4k}{15}(b^5-a^5)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{8\pi k}{15}(b^5-a^5)
\end{aligned}$$