

Probability and Statistics / 확률과 통계

강의노트 13

정규분포

92. 이항분포 $X \sim B(n, p)$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

에서 n 이 커지면 ? => 계산이 어려워짐 (과거)

--> 드 무아브르, 베르누이 의 고민

93. $p=0.5$ 인 이항분포가 간명한 연속확률밀도함수로 근사될 수 있음을 보임 (드무아브르)

- 1) n 이 큰 이항분포
- 2) 평균이 0이 되도록 옮김
- 3) 표준편차가 1이 되도록 x 축 방향 압축, 그래프 아래 면적인 1이 되도록 y 축 방향 늘리거나 줄임

94. 표준정규분포

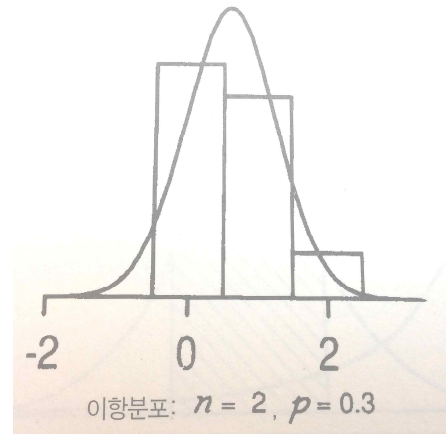
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

n 이 크면 이항분포가 정규분포로 근사화 됨

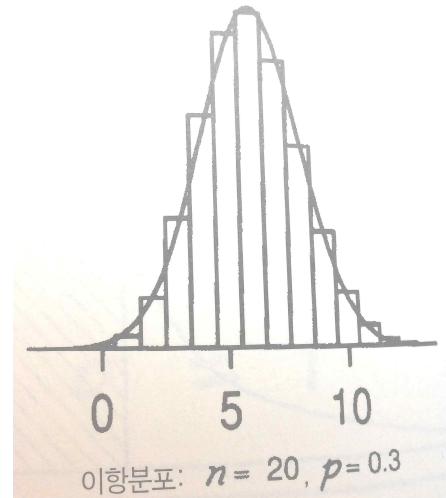
$p=0.5$ 인 이항분포를 정규화 -> 중심이 0, 표준편차가 1

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

95. p 가 .5 가 아닐 때 이항분포와 정규분포에 관해서



n 이 작을 때 그래프의 모양은 정규분포를 따르지 않는다.



n 이 커지면 p 가 .5 가 아니더라도 정규분포를 따라간다.

n	x	p										
		0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9
1	0	0.900	0.800	0.750	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.250	0.200	0.100
1	1	0.100	0.200	0.250	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.750	0.800	0.900
2	0	0.810	0.640	0.563	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.063	0.040	0.010
2	1	0.180	0.320	0.375	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.375	0.320	0.180
2	2	0.010	0.040	0.063	0.090	0.160	0.250	0.360	0.490	0.563	0.640	0.810
3	0	0.729	0.512	0.422	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.016	0.008	0.001
3	1	0.243	0.384	0.422	0.441	0.432	0.375	0.288	0.189	0.141	0.096	0.027
3	2	0.027	0.096	0.141	0.189	0.288	0.375	0.432	0.441	0.422	0.384	0.243
3	3	0.001	0.008	0.016	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.422	0.512	0.729
4	0	0.656	0.410	0.316	0.240	0.136	0.063	0.026	0.008	0.004	0.002	0.000
4	1	0.292	0.410	0.422	0.412	0.346	0.259	0.154	0.076	0.047	0.026	0.004
4	2	0.049	0.154	0.211	0.265	0.346	0.375	0.346	0.265	0.211	0.154	0.049
4	3	0.004	0.026	0.047	0.076	0.154	0.259	0.346	0.412	0.422	0.410	0.292
4	4	0.000	0.002	0.004	0.008	0.026	0.063	0.136	0.240	0.316	0.410	0.656
5	0	0.590	0.328	0.237	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002	0.001	0.000	0.000
5	1	0.328	0.410	0.396	0.360	0.259	0.156	0.077	0.028	0.015	0.006	0.000
5	2	0.073	0.205	0.264	0.309	0.346	0.312	0.230	0.132	0.088	0.051	0.008
5	3	0.008	0.051	0.088	0.132	0.230	0.312	0.346	0.309	0.264	0.205	0.073
5	4	0.000	0.006	0.015	0.028	0.077	0.156	0.259	0.360	0.396	0.410	0.328
5	5	0.000	0.000	0.001	0.002	0.010	0.031	0.078	0.168	0.237	0.328	0.590
6	0	0.531	0.262	0.178	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
6	1	0.354	0.393	0.356	0.303	0.187	0.094	0.037	0.010	0.004	0.002	0.000
6	2	0.098	0.246	0.297	0.324	0.311	0.234	0.138	0.069	0.033	0.015	0.001
6	3	0.012	0.089	0.155	0.212	0.270	0.312	0.312	0.270	0.212	0.155	0.089
6	4	0.001	0.015	0.047	0.098	0.187	0.297	0.393	0.410	0.356	0.262	0.178
6	5	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001

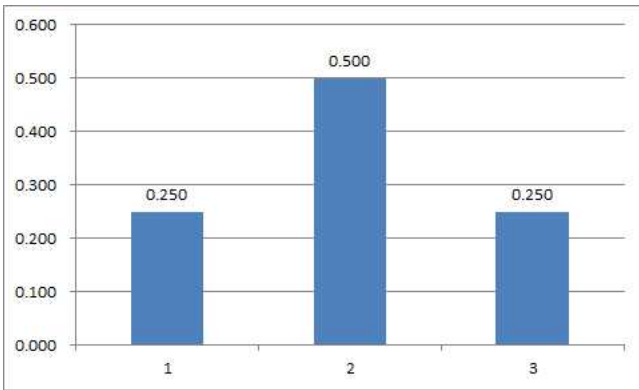
이항분포표 - OLD

96. 동전을 n 번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 k 라 하자. 이때 k 에 대한 이항분포를 계산하라. 단, n=2,10,100 에 대해 계산한다.

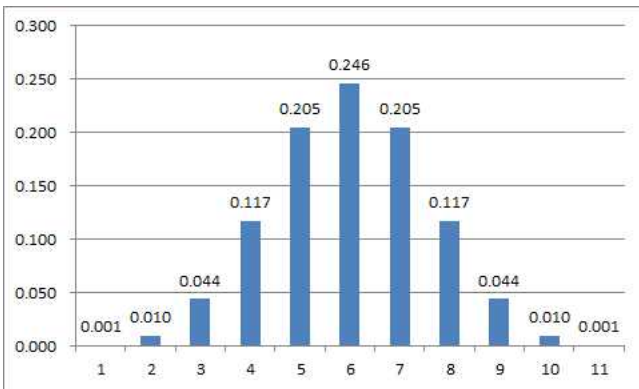
sol. $X \sim B(n, p)$ 에서 n 은 2, 10, 100이 되고, p는 .5 가

된다. $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

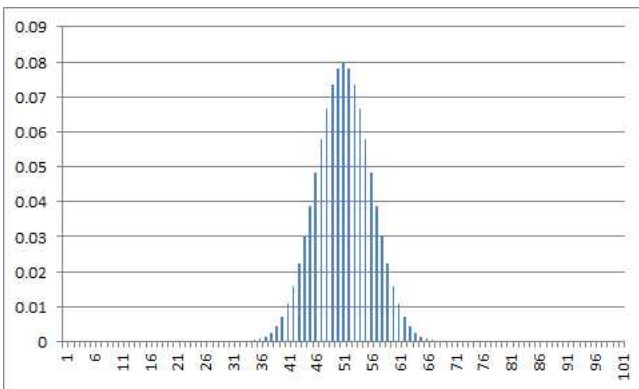
1) n = 2 일 때, $X \sim B(2, 0.5)$



2) n = 10 일 때,



3) n = 100 일 때,



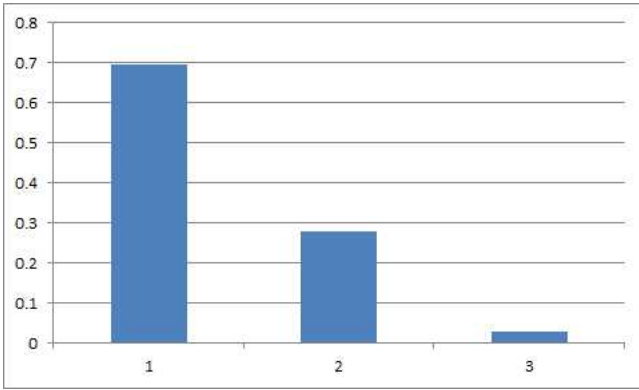
k	n		
	2	10	100
0	0.250	0.001	7.88861E-31
1	0.500	0.010	7.88861E-29
2	0.250	0.044	3.90486E-27
3		0.117	1.27559E-25
4		0.205	3.0933E-24
5		0.246	5.93914E-23
6		0.205	9.40364E-22
7		0.117	1.26277E-20
8		0.044	1.46797E-19
9		0.010	1.5006E-18
10		0.001	1.36554E-17
11			1.11726E-16
12			8.28636E-16
13			5.60923E-15
14			3.48574E-14
15			1.99849E-13
16			1.0617E-12
17			5.24603E-12
18			2.419E-11
19			1.04399E-10
20			4.22816E-10
21			1.61073E-09
22			5.78398E-09
23			1.96152E-08
24			6.29322E-08
25			1.91314E-07
26			5.51867E-07
27			1.51252E-06
28			3.94337E-06
29			9.79043E-06
30			2.31707E-05
31			5.23209E-05
32			0.000112817
33			0.000232471
34			0.000458105
35			0.000863856
36			0.001559739
37			0.002697928
38			0.00447288
39			0.007110732
40			0.010843867
41			0.015869073
42			0.02229227
43			0.030068643
44			0.03895256
45			0.048474297
46			0.057958398
47			0.0665905
48			0.07352701
49			0.078028664
50			0.079589237
51			0.078028664
52			0.07352701
53			0.0665905
54			0.057958398
55			0.048474297
56			0.03895256
57			0.030068643
58			0.02229227
59			0.015869073
60			0.010843867
61			0.007110732
62			0.00447288
63			0.002697928
64			0.001559739
65			0.000863856
66			0.000458105
67			0.000232471
68			0.000112817
69			5.23209E-05
70			2.31707E-05
71			9.79043E-06
72			3.94337E-06
73			1.51252E-06
74			5.51867E-07
75			1.91314E-07
76			6.29322E-08
77			1.96152E-08
78			5.78398E-09
79			1.61073E-09
80			4.22816E-10
81			1.04399E-10
82			2.419E-11
83			5.24603E-12
84			1.0617E-12
85			1.99849E-13
86			3.48574E-14
87			5.60923E-15
88			8.28636E-16
89			1.11726E-16
90			1.36554E-17
91			1.5006E-18
92			1.46797E-19
93			1.26277E-20
94			9.40364E-22
95			5.93914E-23
96			3.0933E-24
97			1.27559E-25
98			3.90486E-27
99			7.88861E-29
100			7.88861E-31

97. $p=0.5$ 가 아닌 경우에 이항분포를 계산해보자.
 주사위를 n 번 던질 때 1의 눈이 나오는 횟수를 k 라 하자.
 이때 k 에 대한 이항분포를 계산하라. 단, $n=2, 10, 100$ 에
 대해 계산한다.

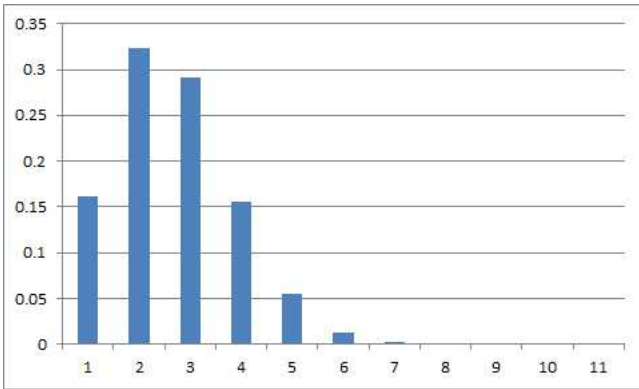
sol. $X \sim B(n, p)$ 에서 n 은 2, 10, 100이 되고, p 는 .167

가 된다. $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

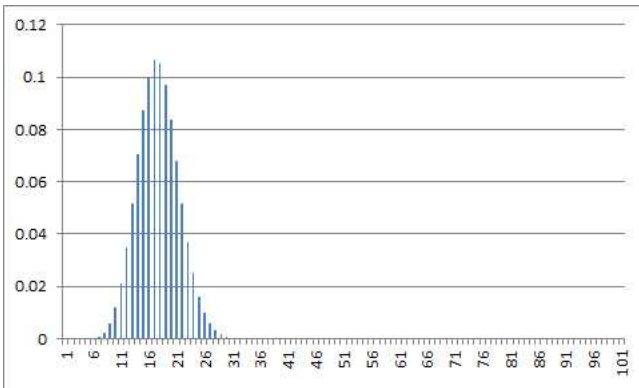
1) $n = 2$ 일 때, $X \sim B(2, 0.167)$



2) $n = 10$ 일 때, $X \sim B(10, 0.167)$



3) $n = 100$ 일 때, $X \sim B(100, 0.167)$



k	n		
	2	10	100
0	0.694444	0.1615056	1.21E-08
1	0.277778	0.3230112	2.41E-07
2	0.027778	0.29071	2.39E-06
3		0.1550454	1.56E-05
4		0.0542659	7.58E-05
5		0.0130238	0.000291
6		0.0021706	0.000921
7		0.0002481	0.002474
8		1.861E-05	0.005752
9		8.269E-07	0.01176
10		1.654E-08	0.021403
11			0.035024
12			0.051952
13			0.070334
14			0.087416
15			0.100237
16			0.106501
17			0.105248
18			0.097062
19			0.08378
20			0.067862
21			0.051704
22			0.037133
23			0.025186
24			0.016161
25			0.009826
26			0.005669
27			0.003107
28			0.00162
29			0.000805
30			0.000381
31			0.000172
32			7.42E-05
33			3.06E-05
34			1.2E-05
35			4.54E-06
36			1.64E-06
37			5.68E-07
38			1.88E-07
39			5.98E-08
40			1.82E-08
41			5.34E-09
42			1.5E-09
43			4.05E-10
44			1.05E-10
45			2.61E-11
46			6.24E-12
47			1.43E-12
48			3.17E-13
49			6.72E-14
50			1.37E-14
51			2.69E-15
52			5.07E-16
53			9.18E-17
54			1.6E-17
55			2.67E-18
56			4.3E-19
57			6.63E-20
58			9.83E-21
59			1.4E-21
60			1.91E-22
61			2.51E-23
62			3.16E-24
63			3.81E-25
64			4.4E-26
65			4.88E-27
66			5.17E-28
67			5.25E-29
68			5.1E-30
69			4.73E-31
70			4.19E-32
71			3.54E-33
72			2.85E-34
73			2.19E-35
74			1.6E-36
75			1.11E-37
76			7.28E-39
77			4.54E-40
78			2.68E-41
79			1.49E-42
80			7.82E-44
81			3.86E-45
82			1.79E-46
83			7.77E-48
84			3.14E-49
85			1.18E-50
86			4.13E-52
87			1.33E-53
88			3.93E-55
89			1.06E-56
90			2.59E-58
91			5.69E-60
92			1.11E-61
93			1.91E-63
94			2.85E-65
95			3.6E-67
96			3.75E-69
97			3.09E-71
98			1.89E-73
99			7.65E-76
100			1.53E-78