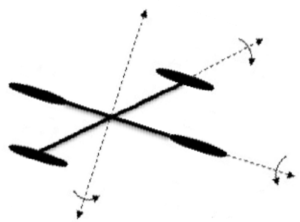
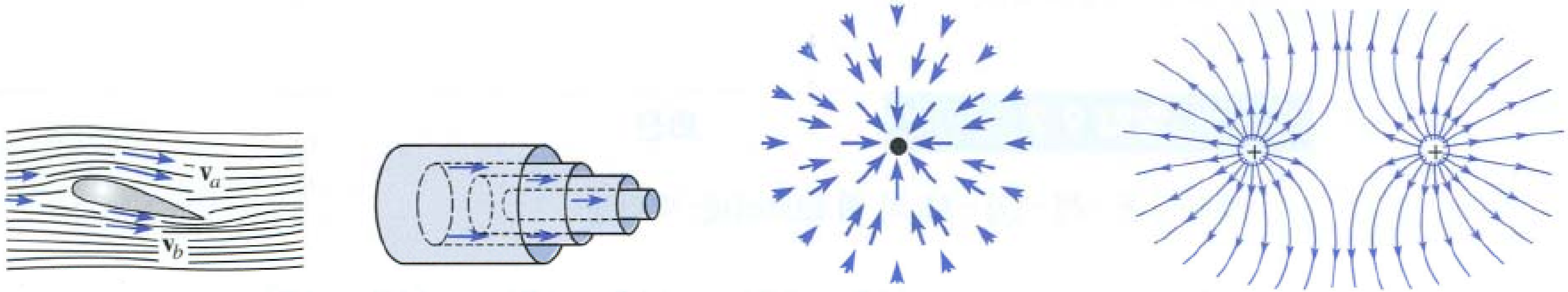
9장 벡터의 미적분
(5)



- 회전(curl)과 발산(divergence)

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

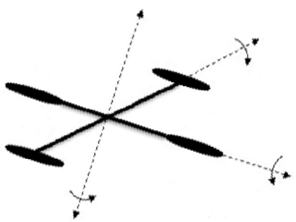


(a) 익형(비행기 날개) 주위의 공기 흐름

(b) 동맥 내부 혈액의 흐름, 혈액의 원통형 층은 혈관 중앙에서 빠름

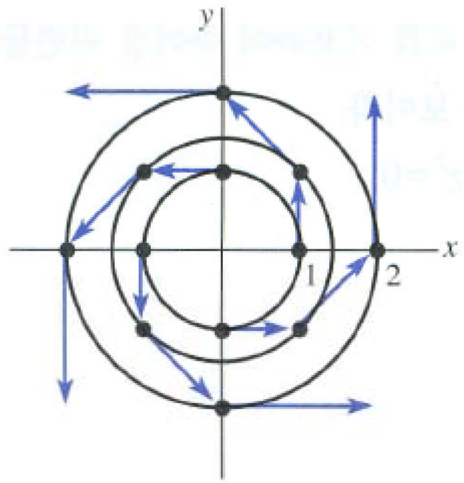
(c) 거리의 제곱에 반비례하는 힘장, 인력의 크기는 입자에 가까울수록 큼

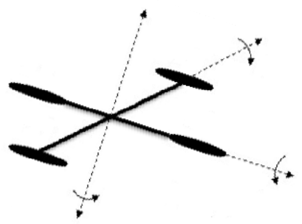
(d) 두 개의 같은 크기의 양전하 주위의 힘장



예제 1 2차원 벡터장

2차원 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ 을 그리라.





정의 9.7 **회전**

벡터장 $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$의 **회전**(curl)은 벡터장

$$\text{curl}\,\mathbf{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

이다.

$$\text{curl}\,\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

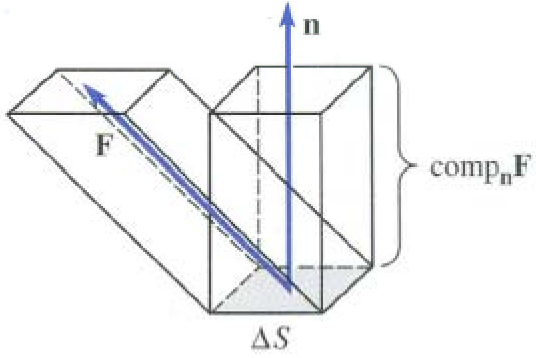


그림 9.39 넓이 ΔS를 통과하는 유체의 흐름

$$(\text{높이})(\text{밑변의 넓이}) = (\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F})\,\Delta S = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,\Delta S$$

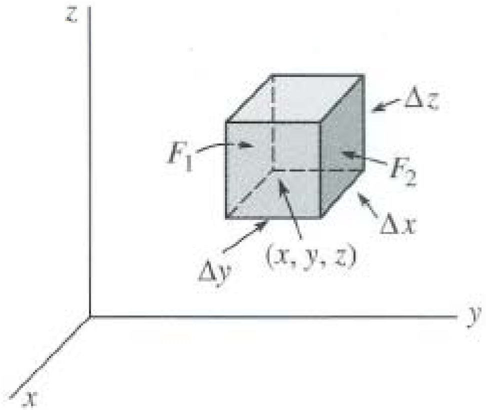


그림 9.40 직육면체 요소를 통과하는 벡터장의 전체 선다발은 얼마일까?

면 F_1의 넓이는 $\Delta x \Delta z$

면 F_1을 지나는 $\mathbf{F}$의 선다발 $\mathbf{F}\cdot(-\mathbf{j})\,\Delta x\,\Delta z = -Q(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta z$

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{j})\,\Delta x\,\Delta z = Q(x, y+\Delta y, z)\,\Delta x\,\Delta z$$

$$Q(x, y+\Delta y, z)\,\Delta x\,\Delta z + (-Q(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta z)$$
$$= [Q(x, y+\Delta y, z) - Q(x, y, z)]\,\Delta x\,\Delta z$$

$$\frac{[Q(x, y+\Delta y, z) - Q(x, y, z)]}{\Delta y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \approx \frac{\partial Q}{\partial y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \quad \text{그리고} \quad \frac{\partial R}{\partial z}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

정의 9.8 **발산**

벡터장 $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$의 발산(divergence)은 스칼라 함수

$$\text{div}\,\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

이다.

$$\text{div}\,\mathbf{F}=\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}P(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial y}Q(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial z}R(x,y,z)$$

예제 2 회전과 발산

$\mathbf{F}=(x^2y^3-z^4)\mathbf{i}+4x^5y^2z\mathbf{j}-y^4z^6\mathbf{k}$에 대해 curl $\mathbf{F}$와 div $\mathbf{F}$를 구하라.

풀이 (1)에서

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 - z^4 & 4x^5y^2z & -y^4z^6 \end{vmatrix}$$

$$= (-4y^3z^6 - 4x^5y^2)\mathbf{i} - 4z^3\mathbf{j} + (20x^4y^2z - 3x^2y^2)\mathbf{k}$$

이고, (4)에서

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3 - z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(4x^5y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^4z^6)$$

$$= 2xy^3 + 8x^5yz - 6y^4z^5$$

이다. ❑